УДК 517.984

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ С ЧАСТИ ГРАНИЦЫ[1]

Р. Р. Акопян (Озерск, Екатеринбург, РФ)
RRAkopyan@mephi.ru

Пусть G — односвязная ограниченная область комплексной плоскости с границей Γ, являющейся замкнутой жордановой спрямляемой кривой. Через γ_1 обозначим измеримое подмножество Γ, имеющее положительную меру; $\gamma_2 = \Gamma \setminus \gamma_1$.

Рассмотрим $Q = Q^{q,r}_{\gamma_1,\gamma_2}(G)$, $q, r \geq \infty$, — класс аналитических в области G функций f пространства Харди $H^1(G)$, чьи граничные значения удовлетворяют условиям

$$\|f\|_{L^q(\gamma_1)} < +\infty, \quad \|f\|_{L^r(\gamma_2)} \leq 1.$$

Обозначим $\Upsilon = \Upsilon_{z_0,\gamma_1,G}$ функционал аналитического продолжения в точку $z_0 \in G$ с части границы γ_1 — функционал, ставящий в соответствие граничным значениям аналитической функции f на γ_1 ее значение в точке z_0; т.е. $\Upsilon\left(f\,|_{\gamma_1}\right) = f(z_0)$. Пусть $\mathcal{L}(N), N > 0$, является множеством линейных функционалов на $L^q(\gamma_1)$ с нормой, не превосходящей числа N. Наилучшим приближением функционала Υ множеством $\mathcal{L}(N)$ на классе функций Q является величина

$$E(N) = \inf\left\{U(T)\,:\,T \in \mathcal{L}(N)\right\}, \tag{1}$$

где величина $U(T)$ определяется равенством

$$U(T) = \sup\left\{|f(z_0) - Tf|\,:\,f \in Q\right\}.$$

Задача (1) является частным случаем задачи Стечкина приближения неограниченного оператора ограниченными на классе элементов банахового пространства и взаимосвязана с задачей оптимального восстановления; историю исследования задачи Стечкина и ее взаимосвязь с экстремальными задачами см. в [1] и приведённой там библиографии.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-01-02705), а также при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006).

В случае $q = r = \infty$ решение задачи (1) получено в работе [2]; для частных случаев области G см. также [3, 4].

Теорема 1. *Для величины* (1) *справедливо равенство*

$$E(N) = C\beta\alpha^{\alpha/\beta}N^{-\alpha/\beta},$$

в котором $\alpha = \alpha(z_0, \gamma_1, G)$ *– гармоническая мера* γ_1 *относительно области* G *в точке* z_0, $\beta = 1 - \alpha$, *а величина* C *задается соотношениями*

$$C = \alpha^{-\alpha/q}\beta^{-\beta/r}\varepsilon^{1/q}(\gamma_1)\varepsilon^{1/r}(\gamma_2),$$

$$\varepsilon(\gamma_k) = \exp\left\{\int\limits_{\gamma_k} P(z_0,\zeta)\ln P(z_0,\zeta)\,ds\right\},$$

P *– ядро Пуассона области* G *(плотность гармонической меры).*

Функционал наилучшего приближения определяется равенством

$$T_0 f = \int\limits_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\,\frac{f_0(z_0)}{f_0(\zeta)}\,f(\zeta)\,ds,$$

в котором f_0 *– функция Сегё с модулем граничных значений*

$$|f_0(\zeta)| = \begin{cases} C^{1/\beta}\alpha^{1/\beta-1/q}N^{1/\beta} \;\; P^{1/q}(z_0,\zeta), & \zeta\in\gamma_1,\\ \beta^{-1/r} \;\; P^{1/r}(z_0,\zeta), & \zeta\in\gamma_2.\end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // УМН. 1996. Т. 51, № 6(312). С. 89–124.

2. *Акопян Р. Р.* Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям // Матем. заметки. 2016. Т. 99(2). С. 163–170.

3. *Акопян Р. Р.* Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в полосе функций // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 3. С. 46–54.

4. *Акопян Р. Р.* Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в кольце функций // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 3–13.