УДК 517.95

О ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА КВАЗИМОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ[1]

А. В. Светлов (Волгоград, РФ)
a.v.svetlov@gmail.com

Рассмотрим многообразие M, представимое в виде $K \cup D$, где K — компактное мноогообразие, а конец D — простое скрещенное произведение. Простым скрещенным произведением порядка k мы называем полное риманово многообразие D, изометричное произведению $\mathbf{R_0} \times \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \cdots \times \mathrm{S}_k$ (где $\mathbf{R_0} = (r_0, +\infty)$, а S_i — компактные римановы многообразия без края размерности n_i) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + q_1^2(r)d\theta_1^2 + \cdots + q_k^2(r)d\theta_k^2,$$

где $d\theta_i^2$ метрика на S_i, а $q_i(r)$ — гладкие положительные на $\mathbf{R_0}$ функции.

Рассмотрим на многообразии M оператор Лапласа – Бельтрами

$$-\Delta = -\mathrm{div}\nabla$$

и оператор Шредингера

$$L = -\Delta + c(r, \theta),$$

где $c(r, \theta)$ — произвольная функция на многообразии. Кроме того, введем обозначение $s(r) = q_1^{n_1}(r) \cdot \cdots \cdot q_k^{n_k}(r)$. Заметим, что такие многообразия являются простым обобщением искривленных произведений порядка k, поведение решений различных эллиптических уравнений на которых достаточно подробно изучено А. Г. Лосевым, Е. А. Мазепой (см., напр., [1, 2]) и другими авторами, причем разработанные методы оказались применимы и для многообразий более общего вида (см. [3, 4]).

Будем говорить, что спектр оператора дискретен, если он состоит лишь из собственных значений конечной кратности. Для оператора Лапласа – Бельтрами известен критерий дискретности спектра на рассматриваемых многообразиях. При этом для оператора Шредингера удается получить критерий дискретности спектра только при наложении некоторых условий на потенциал и метрику многообразия. В частности, от потенциала требовалась радиальная симметричность (см. [6–8]), т.е. рассматривался оператор Шредингера вида

$$L_r = -\Delta + c(r).$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-41-02479-р_поволжье_а).

В настоящей работе получены достаточные условия дискретности спектра оператора Шредингера с потенциалом общего вида на квазимодельных многообразиях.

Будем обозначать $V(\cdot)$ и $\mathrm{cap}(\cdot)$ объём и ёмкость соответствующих объектов, а $B(r) = \{(\rho,\theta) \in D : \ \rho < r\}$ — шар радиуса r с центром в начале координат на многообразии D.

Теорема 1. *Пусть $c(r,\theta) \geq 0$. Тогда спектр оператора Шрёдингера L на многообразии M дискретен, если на конце D выполнено одно из условий:*

$$V(D) < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{V(D \setminus B(r))}{\mathrm{cap}(B(1), B(r))} = 0,$$

или

$$\mathrm{cap}\, B(1) > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{V(B(r))}{\mathrm{cap}\, B(r)} = 0.$$

Отметим, что условия, выполнение которых требуется в данной теореме, для дискретности спектра оператора Лапласа – Бельтрами являются не только достаточными, но и необходимыми [5].

Далее нам потребуется еще одно обозначение:

$$F(r) = \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)' + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)^2.$$

Имеет место так же следующий результат.

Теорема 2. *Если на многообразии M существует функция $\tilde{c}(r)$ такая, что $c(r,\theta) \geq \tilde{c}(r)$ и $\tilde{c}(r) + F(r) > -C$ ($C = \mathrm{const} > 0$), то для дискретности спектра оператора Шредингера L на многообразии M достаточно, чтобы для произвольного $\omega > 0$ было выполнено*

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_r^{r+\omega} (\tilde{c}(r) + F(r))\, dr = +\infty.$$

Заметим, что для некоторых случаев потенциала данное утверждение так же является и необходимым условием дискретности спектра оператора Шредингера, а в простейшем случае, если вместо квазимодельного многообразия рассматривать числовую приямую, оно соответствует известному критерию дискретности спектра А.М. Молчанова на прямой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лосев А. Г.* О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 87–93.

2. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, вып. 1. С. 84–110.

3. *Корольков С. А., Светлов А. В.* Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера в неограниченных областях римановых многообразий // Наука и образование в современной конкурентной среде : материалы междунар. науч.-практ. конф. : в 3-х частях. Уфа, 2014. С. 215–221.

4. *Korolkova E., Korolkov S., Svetlov A.* On solvability of boundary value problems for solutions of the stationary Schrödinger equation on unbounded domains of Riemannian manifolds // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2014. Vol. 97, № 2. P. 231–240.

5. *Светлов А. В.* Критерий дискретности спектра оператора Лапласа–Бельтрами на квазимодельных многообразиях // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1362–1371.

6. *Светлов А. В.* Спектр оператора Шреденгера на скрещенных произведениях // Вестн. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1, Математика. Физика. 2002. № 7. С. 12–19.

7. *Svetlov A. V.* Discreteness criterion for the spectrum of the Schrödinger operator on weighted quasimodel manifolds // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2013. Vol. 89, № 3. P. 393–400.

8. *Светлов А. В.* О спектре оператора Шредингера на многообразиях специального вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, № 4, ч. 2. С. 584–589.

УДК 517.5

ЗАДАЧА О ДВУХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКАХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ И ПРОБЛЕМА МОРЕРЫ

В. Е. Силенко (Орехово-Зуево, РФ)
V.Silenko@bk.ru

В работе рассматриваются проблемы Помпейю и Мореры и их обобщения на гиперболической плоскости для случая двух гиперболических прямоугольников.

Ранее С. А. Вильямс для евклидового пространства $X = \mathbb{R}^n$, К. А. Беренстейн и М. Шахшахани в [1, следствие 1] для симметрического пространства $X = G/K$ некомпактного типа (с группой движений G) получили достаточные условия того, что данный компакт является множеством Помпейю. В связи с этим возникли задачи об исследовании нескольких множеств (например, задачи о двух кругах, трех квадратах в $\mathbb{R}^2$), а также задачи о нахождении дополнительных ограничений на класс функций, если рассматривается лишь подгруппа (например, сдвигов) группы G. Такие задачи были предметом исследований многих математиков, среди которых Д. Помпейю, Л. Браун, Ф. Шницер и А. Л. Шилдс, Л. Зальцман, К. А. Беренстейн, Б. А. Тейлор, П. Г. Лард, Р. Гэй, А. Ижер, Р. М. Тригуб, В. П. Заставный, В. В. Волчков, Вит. В. Волчков и другие.