УДК 517.5

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ БЕССЕЛЯ И БАЗИСЫ РИССА[1]

А. М. Сарсенби (Шымкент, Казахстан)
abzhahan@mail.ru
П. А. Терехин (Саратов, РФ)
terekhinpa@mail.ru

Пусть $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полные в пространстве $L^2(0,1)$ биортогонально сопряженные друг к другу системы функций. Решению задачи о базисности по Риссу таких систем функций посвящены многочисленные исследования по функциональному анализу, теории функций, спектральной теории дифференциальных операторов и вычислительной математике. Следует упомянуть фундаментальную работу Н. К. Бари [1], где такая задача была поставлена и решена во всей ее общности на основе установленной двойственности между введенными понятиями бесселевой и гильбертовой системы, а также системы Фишера – Рисса, которую в современной терминологии общепринято называть фреймом. Общность подхода Бари делает его наиболее широко используемым методом установления базисности по Риссу систем функций. Как хорошо известно, суть метода состоит в получении оценок

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f,u_n)|^2 \le B\|f\|_2^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |(f,v_n)|^2 \le B\|f\|_2^2,$$

для любой функции $f \in L^2(0,1)$ или, что эквивалентно, в доказательстве сходимости в пространстве $L^2(0,1)$ каждого из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x), \tag{1}$$

с произвольными коэффициентами $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$.

Заметим, что условие сходимости рядов (1) можно записать так: $\ell^2 \subset X(u) \cap X(v)$, где $X(u)$ — пространство коэффициентов системы $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. пространство всех числовых последовательностей $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых сходится первый из рядов в (1). Кроме того, само условие базисности по Риссу означает, что $X(u) = X(v) = \ell^2$.

[1]Первый автор поддержан Минобрнауки Республики Казахстан (проекты № 0971/ГФ4, 5414/ГФ4). Второй автор подготовил работу в рамках выполнения проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К), а также при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

В спектральной теории дифференциальных операторов известен ряд результатов, показывающих, что для безусловной базисности собственных и присоединенных функций дифференциальных операторов необходимо и достаточно выполнения условий вида

$$\|u_n\|_\infty \le C\|u_n\|_2, \qquad \|v_n\|_\infty \le C\|v_n\|_2, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

— см., напр., [2, 3]. В связи с этим возникает вопрос: для каких классов полных биортогонально сопряженных систем функций выполнение условия равномерной ограниченности типа (2) гарантирует их базисность по Риссу? А также вопрос: какие дополнительные условия к условию типа (2) обеспечивают базисность по Риссу общих систем функций? Подобные вопросы можно поставить и относительно свойства бесселевости отдельной системы функций.

Теорема 1 [4]. *Пусть полные биортогонально сопряженные системы функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$ равномерно ограничены в пространстве $L^2(0,1)$:*

$$\|u_n\|_2 \le C, \qquad \|v_n\|_2 \le C, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

и оба пространства коэффициентов $X(u)$ и $X(v)$ являются идеальными пространствами последовательностей. Тогда обе системы $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$ образуют базис Рисса.

Напомним, что банахово пространство последовательностей X называется идеальным, если из условий $|a_n| \le |b_n|$, $n = 1, 2, \dots$, и $\{b_n\}_{n=1}^\infty \in X$ следует, что $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in X$.

Аналогичный теореме 1 результат справедлив и для бесселевых систем. А именно, равномерно ограниченная в $L^2(0,1)$ система функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$, у которой пространство коэффициентов $X(u)$ является идеальным, будет системой Бесселя.

Заметим также, что в формулировке теоремы 1 пару $X(u)$ и $X(v)$ можно заменить на $X(u) \cap \ell^2$ и $X(v) \cap \ell^2$.

Несмотря на то, что все условия теоремы 1 являются необходимыми, остается открытым вопрос: можно ли отбросить дополнительное требование об идеальности пространств коэффициентов для конкретных классов систем функций? Такие примеры известны. Укажем на один из них.

Пусть V — оператор (простого, одностороннего) сдвига в гильбертовом пространстве H. Это означает, что $V : H \to H$ — изометрия пространства H и существует вектор $e \in H$ такой, что система $\{V^n e\}_{n=0}^\infty$ образует ортонормированный базис в H. Оператор сдвига реализуется как оператор $Vf(z) = zf(z)$, действующий в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$. Как известно, система функций $\{z^n f(z)\}_{n=0}^{\infty}$ является бесселевой (базисом Рисса) тогда и только тогда, когда $f \in H^{\infty}(\mathbb{D})$ (соответственно, $f, 1/f \in H^{\infty}(\mathbb{D})$). Видим, что никаких дополнительных условий к условию равномерной ограниченности не требуется.

Теперь рассмотрим операторную структуру мультисдвига в гильбертовом пространстве, которая является аналогом оператора сдвига для случая двух некоммутирующих операторов. Пара изометрий W_0 и W_1 гильбертова пространства H называется мультисдвигом, если существует вектор $e \in H$ такой, что система $\{W^{\alpha} e\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ образует ортонормированный базис в H. Поясним, что $W^{\alpha} = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}}$ обозначает произведение операторов для каждого мультииндекса $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ из семейства $\mathbb{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0,1\}^k$. Мультисдвиг реализуется как пара операторов

$$W_0 f(x) = f(2x), \qquad W_1 f(x) = r(x) f(2x),$$

в пространстве $L_0^2(0,1)$, состоящем из всех функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

$$f \in L^2(0,1), \qquad \int_0^1 f(x)\, dx = 0, \qquad f(x+1) = f(x).$$

Здесь $r(x)$ — периодическая функция Хаара – Радемахера – Уолша. Семейство функций $\{W^{\alpha} f(x)\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ называется аффинной системой функций типа Уолша [5]. Сопоставим каждому мультииндексу $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{A}$ натуральное число $n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu + 2^k$. Получим следующее представление функций аффинной системы

$$f_n(x) = W^{\alpha} f(x) = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}} f(x) = f(2^k x) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(x),$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — система Радемахера.

Будут ли для аффинных систем функций типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ справедливы аналоги результатов о бесселевости и базисности по Риссу систем аналитических функций вида $\{z^n f(z)\}_{n=0}^{\infty}$? Покажем, что ответ будет отрицательным.

Теорема 2. *Существует непрерывная функция $f(x) \in L_0^2(0,1)$, порождающая аффинную систему типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которая не является системой Бесселя.*

Конструкция требуемой функции $f(x)$ основана на использовании примера Е. М. Никишина [6], дающего решение одной задачи П. Л. Ульянова [7].

Для сравнения с теоремой 2 приведем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть функция* $f(x) \in L_0^2(0,1)$ *удовлетворяет условию Липшица* $|u(x) - u(y)| \leq L|x-y|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$. *Тогда аффинная система функций типа Уолша* $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ *является системой Бесселя.*

Аналогичный теореме 2 результат имеет место и для базисов Рисса, т.е. существует ограниченная функция $f \in L_0^2(0,1)$, порождающая полную в пространстве $L_0^2(0,1)$ минимальную (с полной в $L_0^2(0,1)$ биортогонально сопряженной системой) аффинную систему функций типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$, которая не является базисом Рисса.

Приведенные результаты показывают, что дополнительное условие идеальности пространств коэффициентов в теореме 1 не может быть отброшено в классе аффинных систем функций. Выбор нами класса аффинных систем функций продиктован глубокой аналогией (основанной на сопоставлении оператора сдвига и операторов мультисдвига в гильбертовом пространстве) в структуре этих систем и систем аналитических функций $\{z^n f(z)\}_{n=0}^\infty$, для которых никаких дополнительных условий, обеспечивающих их бесселевость и базисность по Риссу, не требуется.

В докладе планируется также представить различные признаки базисности по Риссу аффинных систем функций и указать примеры аффинных систем Бесселя и базисов Рисса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бари Н. К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. записки Моск. гос. ун-та. 1951. Вып. 148. С. 69–107.

2. *Ильин В. А., Крицков Л. В.* Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. 2006. Т. 96. С. 5–105.

3. *Сарсенби А. М.* Критерии базисности Рисса систем собственных и присоединенных функций дифференциальных операторов высших порядков на отрезке // ДАН. 2008. Т. 419, вып. 5. С. 601–603.

4. *Sarsenbi A. M., Terekhin P. A.* Riesz Basicity for General Systems of Functions // J. Function Spaces. 2014. Vol. 2014. Article ID 860279.

5. *Терехин П. А.* Аффинные системы функций типа Уолша. Ортогонализация и пополнение // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. вып. 4, ч. 1. С. 395–400.

6. *Никишин Е. М.* О рядах по системе $\varphi(nx)$ // Матем. заметки. 1969. Т. 5, вып. 5. С. 527–532.

7. *Ульянов П. Л.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов // УМН. 1964. Т. 19, вып. 1(115). С. 3–69.