УДК 517.92725

РАВНОСХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ 2-ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ[1]

А. М. Сарсенби (Шымкент, Казахстан)
abzhahan@mail.ru

В работах [1, 2] исследована спектральная задача

$$-u''(-x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < 1, \tag{1}$$

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{2}$$

Было установлено, что система собственных функций вида

$$\left\{\sin k\pi x,\ k = 1, 2, ...,\ \cos\left(l + \tfrac{1}{2}\right)\pi x,\ l = 0, 1, 2, ...\right\}$$

образует ортонормированный базис пространства $L_2(-1, 1)$. В связи с этим естественно возникает вопрос: будет ли базисом в пространстве $L_2(-1, 1)$ система собственных функций спектральной задачи

$$-u''(-x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < 1, \tag{3}$$

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0,$$

с непрерывным комплекснозначным коэффициентом $q(x)$.

В работе [3] построена функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и со спектральным параметром (1), (2).

Рассмотрим краевую задачу

$$-u''(-x) = \lambda u(x) + f(x), \tag{4}$$

с краевыми условиями (2), где $f(x)$ — непрерывная функция.Функцией Грина краевой задачи (1)–(2) назовем такую функцию $G(x, t, \lambda)$, что функция

$$u(x) = \int\limits_{-1}^{1} G(x, t, \lambda) f(t)\, dt$$

является решением краевой задачи (4), (2).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК (проекты № 0971/ГФ4, № 5414/ГФ4).

Теорема 1 [3]. *Если λ не является собственным значением однородной краевой задачи* (1)–(2)*, то ее функция Грина имеет вид*

$$G(x,t,\lambda)=\frac{1}{8\rho}\left\{\frac{e^{\rho}+e^{-\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}}\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)-\right.$$

$$\left.-i\frac{e^{i\rho}-e^{-i\rho}}{e^{i\rho}+e^{-i\rho}}\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}+e^{-i\rho t}\right)\right\}+g(x,t,\lambda), \tag{5}$$

$$g(x,t,\lambda)=\frac{1}{8\rho}\times$$

$$\times\begin{cases} -i\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}-e^{-i\rho t}\right)+\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right), t\le -x,\\ i\left(e^{i\rho t}+e^{-i\rho t}\right)\left(e^{i\rho x}-e^{-i\rho x}\right)-\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)\left(e^{\rho x}+e^{-\rho x}\right), -x\le t\le x,\\ i\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}-e^{-i\rho t}\right)-\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right), t\ge x. \end{cases}$$

С помощью функции Грина (5) мы можем написать, разложение произвольной функции из класса $L_1(-1,1)$ по собственным функциям спектральной задачи (1)–(2).

В комплексной $\rho=\sqrt{\lambda}$ плоскости рассмотрим окружности P_{k1}, $k=1,2,...$, P_{k2}, $k=0,1,...$, с общим центром в начале координат:

$$P_{k1}:|\rho|=k\pi+\frac{1}{4}, P_{k2}:|\rho|=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{1}{4}.$$

При $\lambda=\rho^2$ окружности P_{k1}, P_{k2} соответственно переходят в окружности $\widetilde{P}_{k1}$, $\widetilde{P}_{k2}$ в λ плоскости

$$P_{k1}:|\rho|^2=(k\pi+\frac{1}{4})^2; P_{k2}:|\rho|^2=\left((k+\frac{1}{2})\pi+\frac{1}{4}\right)^2.$$

Для любой функции $f(x)\in L_1(-1.1)$ частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (1), (2) имеет вид (см., например, [4])

$$\sigma_m(f)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{P}_m}\left(\int\limits_{-1}^{1}G(x,t,\lambda)f(t)\,dt\right)d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{P_m}\left(\int\limits_{-1}^{1}G(x,t,\lambda)f(t)\,dt\right)2\rho d\rho.$$

Подробные вычисления приводят к соотношению вида

$$\sigma_m(f) = \sum_{k=1}^{m} a_k \sin k\pi x + \sum_{k=0}^{m} b_k \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x,$$

где

$$a_k = \int_{-1}^{1} f(t) \sin k\pi t dt, \; b_k = \int_{-1}^{1} f(t) \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t dt.$$

Обозначим через $G_q(x,t,\lambda)$ функцию Грина задачи (3), (2), а через $G(x,t,\lambda)$ — функцию Грина задачи (1), (2). Частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (3), (2) обозначим через

$$S_m(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left[\int_{P_m} G_q(x,t,\lambda)2\rho d\rho\right] f(t)dt.$$

Последовательность $S_m(f)$ назовем равносходящимся с последовательностью $\sigma_m(f)$ на промежутке $-1 \leq x \leq 1$, если $S_m - \sigma_m \to 0$ равномерно на этом промежутке при $m \to \infty$.

Теорема 2. *Для любой функции $f(x) \in L_1(-1,1)$ последовательность $S_m(f)$ равносходится с последовательностью $\sigma_m(f)$.*

Результаты настоящей заметки имеют тесную внутреннюю связь с циклом работ профессора А. П. Хромова и его последователей [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sadybekov M. A., Sarsenbi A. M.* Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution // Differ. Equations. 2012. Vol. 48, № 8. P. 1112–1118.

2. *Sarsenbi A. M.* Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator // Differ. Equations. 2010. Vol. 46, № 4. P. 509–514.

3. *Sarsenbi A. M.* The Green's function of the second-order differential operator with an involution and its application // AIP Conf. Proc. 2015. Vol. 1676. 020010. DOI: 10.1063/1.4930436.

4. *Coddington E. A., Levinson N.,* Theory of ordinary differential equations. N. Y., Toronto, London, 1955.

5. Math-Net.Ru. Персоналии. Хромов Август Петрович. URL: http://www.mathnet.ru/rus/person9199 (дата обращения 16.12.2015).