УДК 517.984

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО НЕРЕГУЛЯРНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ[1]

В. С. Рыхлов (Саратов, РФ)
RykhlovVS@yandex.ru

На отрезке [0,1] рассмотрим краевую задачу на собственные значения (с.з.) для пучка $L(\lambda)$:

$$y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) - y'(0) = 0. \tag{1}$$

Характеристическое уравнение $\omega^2 - 2\omega + 1 = 0$ пучка имеет кратные корни $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Характеристический определитель $\Delta(\lambda) = e^\lambda - 1$ является вырожденным, а пучок $L(\lambda)$, таким образом, нерегулярным [1, с. 66–67]. С.з. пучка являются числа $\lambda_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решается задача нахождения условий на вектор-функцию (в.-ф.) $f = (f_1, f_2)^T$, при которых имеет место двукратная разложимость этой в.-ф. в биортогональный ряд Фурье по производным цепочкам пучка $L(\lambda)$ (см. [1, с. 102]).

В нерегулярном случае обыкновенного дифференциального оператора 3-го порядка, когда характеристики лежат в вершинах правильного треугольника, задача о разложении решена в [2]. Разложения по корневым функциям в случае регулярного пучка с четырехкратными характеристиками изучались в [3]. Случай нерегулярного пучка второго порядка с простыми характеристиками рассматривался в [4].

Для данной в.-ф. $f = (f_1, f_2)^T$ определим функцию $F(x, \lambda, f) := -\lambda f_1(x) + 2f_1'(x) - f_2(x)$. Обозначим через Γ_k круговые контуры с центром в начале координат и радиуса $(2k-1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $G(x,t,\lambda)$ есть функция Грина задачи (1).

Теорема 1. *Если в.-ф. f удовлетворяет условиям:*

$$f_1''', f_2'' \in L_p[0,1], \ 1 < p \le +\infty, \tag{2}$$

$$f_1^{(s)}(0) = f_1^{(s)}(1) = 0, \ s = 0,1,2; \ f_2^{(s)}0) = f_2^{(s)}(1) = 0, \ s = 0,1. \tag{3}$$

то имеют место следующие формулы двукратного разложения в.-ф. f по собственным функциям пучка $L(\lambda)$:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} \lambda^s \int_0^1 G(x,t,\lambda) F(x,\lambda,f)\, d\lambda =$$

[1] Работа подготовлена в рамках выполнения проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

$$= f_s(x) + (1-x)\Big(xf_1'(x) - f_1(x) - xf_2(x)\Big)^{(s-1)}, \quad s = 1, 2,$$

где сходимость равномерная по $x \in [0,1]$.

Из этой теоремы получаем результат о разложении в.-ф. f в биортогональный ряд фурье по производным цепочкам пучка $L(\lambda)$.

Теорема 2. *Пусть в.-ф.* f *удовлетворяет условиям* (2)–(3). *Для того, чтобы имели место следующие формулы двукратного разложения в.-ф.* f *по собственным функциям пучка* $L(\lambda)$ *с равномерной сходимостью по* $x \in [0,1]$*:*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} \lambda^s \int_0^1 G(x,t,\lambda) F(x,\lambda,f)\, d\lambda = f_s(x), \quad s = 1, 2,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее тождество

$$xf_1'(x) - f_1(x) - xf_2(x) \equiv 0.$$

Доказательство теоремы 1 проводится путем линеаризации задачи (1) подстановкой $z_1 = y$, $z_2 = \lambda z_1$. В результате получается краевая задача на собственные значения уже для обыкновенного дифференциального оператора $\hat{L}$, но в пространстве вектор-функций $z = (z_1, z_2)^T$: $\hat{L}z - \lambda z = 0$, где

$$\hat{L}z := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{d^2}{dx^2} & \frac{d}{dx} \end{pmatrix} z,$$

$$D_{\hat{L}} = \Big\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Big| z_1', z_2 \in L_1[0,1],\ z_1(0) = 0,\ z_1(1) - z_1'(0) = 0 \Big\}.$$

Очевидно, с.з. пучка $L(\lambda)$ и оператора $\hat{L}$ совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ (см. [1, с. 102]) совпадает с системой собственных в.-ф. оператора $\hat{L}$.

Хорошо известно, что $\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \hat{R}_\lambda f\, d\lambda$, где $\hat{R}_\lambda = (\hat{L} - \lambda E)^{-1}$ резольвента оператора $\hat{L}$, есть частичная сумма разложений в.-ф. f в биортогональный ряд Фурье по собственным в.-ф. оператора $\hat{L}$, соответствующим тем с.з., которые попали внутрь контура Γ_k.

Пусть $\hat{R}_\lambda f = \big(z_1(x,\lambda;f), z_2(x,\lambda;f)\big)^T$. В доказательстве теоремы 1 используются явные формулы для функции $z_1(x,\lambda;f)$ и $z_2(x,\lambda;f)$, которые даются в следующей лемме.

Лемма 1. *Если* $f_0', f_1 \in L_1[0,1]$ *то при* $\operatorname{Re}\lambda \le 0$

$$z_1(x,\lambda;f) = \int_0^1 G(x,t,\lambda) F(t,\lambda;f)\, dt = \int_0^x (x-t) e^{\lambda(x-t)} F(t,\lambda;f)\, dt +$$

$$+\frac{1}{1-e^{\lambda}}\int_0^1 x(1-t)e^{\lambda(x+1-t)}F(t,\lambda;f)\,dt;$$

а при $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$

$$z_1(x,\lambda;f) = \int_0^1 G(x,t,\lambda)F(t,\lambda;f)\,dt = \int_x^1 (t-x)e^{\lambda(x-t)}F(t,\lambda;f)\,dt+$$

$$+\int_0^1 (x-1)te^{\lambda(x-t)}F(t,\lambda;f)\,dt+$$

$$+\frac{1}{1-e^{-\lambda}}\int_0^1 x(t-1)e^{\lambda(x-1-t)}F(t,\lambda;f)\,dt;$$

$$z_1(x,\lambda;f) = \lambda z_0(x,\lambda;f) + f_0(x).$$

Дальнейшее доказательство проводится с использованием приведенных в лемме 1 формул аналогично доказательству соответствующей теоремы о разложении в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969.

2. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. Уфа, 1988. С. 182–193.

3. *Вагабов А. И., Абуд А. Х.* Четырехкратная разлолжимость в ряды Фурье по корневым элементам дифференциального пучка с четырехкратной характеристикой // Вестник Дагест. гос. ун-та. 2015. Т. 30, вып. 1. С. 34–39.

4. *Рыхлов В. С.* Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 21–26.

УДК 517.518

ОЦЕНКИ КОНСТАНТЫ ЧИГЕРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ[1]

К. С. Рютин (Москва, РФ)
kriutin@yahoo.com

Пусть σ, V — площадь поверхности и объём выпуклого тела в $\mathbb{R}^n$, а B_p^n — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_p, $1 \leq p \leq \infty$. Известна следующая задача : найти множество $\mathcal{C}$ в заданном открытом $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с минимальным отношением σ/V, называемым константой Чигера $h(\Omega)$. Данная величина была введена Чигером [1] для оценки минимального

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00332).