в сколь угодно малой правой полуокрестности нуля. Должно ли выполняться предельное соотношение

$$\varliminf_{x\to 0+} g(b,x) \geqslant 0 \quad \forall\, \boldsymbol{b} \in \mathfrak{M}_\Lambda. \tag{7}$$

Теорема 2. *Если верно* (5) *и* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} k(\lambda-\lambda_k) < +\infty$, *то справедливо предельное соотнощение* (7). *Если же при условии* (5) *имеем* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} k(\lambda-\lambda_k) = +\infty$, *то существует такая последовательность* $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathfrak{M}_\Lambda$, *что* $\varliminf\limits_{x\to 0+} g(\boldsymbol{b},x) = -\infty$.

Оказывается, что отрицательная часть суммы ряда (1) с коэффициентами из $\mathfrak{M}_\Lambda$ даже в случае ограниченности Λ не обязана быть суммируемой на $(0,\pi)$!

Теорема 3. *Если верно (5) и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_k)/k < +\infty$, *то отрицательная часть суммы ряда* (1) *лежит в* $L(0,\pi)$, *какова бы ни была последовательность* $\boldsymbol{b} \in \mathfrak{M}_\Lambda$. *Если же* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_k)/k = +\infty$ *и последовательность* $\{\lambda_k\}$ *вогнута, то найдётся такая последовательность* $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathfrak{M}_\Lambda$, *что отрицательная часть* $g(\boldsymbol{b},x)$ *не суммируема на* $(0,\pi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hartman P., Wintner A.* On sine series with monotone coefficients // J. London Math. Soc. 1953. T. 28, № 1. C. 102–104.

УДК 517.935.2

ОБ УСЛОВИЯХ АНАЛИТИЧНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО И ВОЗМУЩАЮЩИХ КВАЗИМНОГОЧЛЕНОВ КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М. С. Портенко, Д. В. Мельничук, Д. К. Андрейченко (Саратов, РФ)

msportenko@gmail.com, meldm007@gmail.com, kp_andreichenko@renet.ru

Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой математические модели технических систем в форме систем связанных посредством условий связи и граничных условий обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. КДС с входной и выходной вектор-функциями $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_x}$ и $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_y}$ рассмотрены в [1, 2]. Динамическая модель линеаризованной КДС сводится к матрице передаточных функций $\Phi(\lambda) = [Q_{kj}(\lambda)/D(\lambda)]$, где $D:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — характеристический [1, 2], а $Q_{kj}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $k=\overline{1,N_y}$, $j=\overline{1,N_x}$, — возмущающие квазимногочлены (индексы k,j далее опущены). Быстрый алгоритм проверки устойчивости КДС, основанный на теоремах из [1, 2], проверяет условие $\underset{0\leqslant\omega\leqslant\infty}{\Delta}\arg D(i\omega)=n\pi/2$, где n — обобщенная степень $D(\lambda)$, а для его применимости необходима аналитичность функций $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ в правой комплексной полуплоскости (λ) и вблизи мнимой оси. Модельные уравнения линеаризованной КДС аналогичны [2]:

$$\dot{\mathbf{y}}=B\mathbf{x}+C\mathbf{y}+A\mathbf{h};\quad \dot{\mathbf{u}}=\mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u})+L_2^{(F)}\mathbf{x}+L_3^{(F)}\mathbf{y}+L_4^{(F)}\dot{\mathbf{y}},\quad \mathbf{r}\in\Omega,$$

$$\left.(\mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})+L_2^{(G)}\mathbf{y})\right|_S=0;\quad \mathbf{h}=\int_S\mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{u})dS;\quad \mathbf{y}(0)=0,\quad \mathbf{u}(\mathbf{r},0)=0.$$

Здесь $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^{N_r}$ – независимые пространственные координаты; $\Omega\subset\mathbb{R}^{N_r}$ и $S=\partial\Omega$ — области, занимаемые объектами управления с распределенными по пространству параметрами, и их границы; $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{u}:\mathbb{R}^{N_r}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N_u}$; $\mathbf{h}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N_h}$; A, B, C – матрицы с постоянными элементами; $L_2^{(F)}$, $L_3^{(F)}$, $L_4^{(F)}$, $L_2^{(G)}$ — матрицы, которые могут зависеть от пространственных координат $\mathbf{r}$; $\mathbb{L}_1^{(F)}$, $\mathbb{L}_1^{(G)}$, $\mathbb{L}^{(H)}$ — линейные операторы; точкой сверху обозначено дифференцирование по времени t. При этом $D(\lambda)=\det(\lambda E-C-AC_u(\lambda))$, $\Phi(\lambda)=(\lambda E-C-AC_u(\lambda))^{-1}(B+AB_u(\lambda))$, а матрицы $B_u(\lambda)$ и $C_u(\lambda)$ находятся решением вспомогательных линейных краевых задач

$$\lambda\mathbf{v}=\mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{v})+L_2^{(F)}\mathbf{e}_j^{(N_x)},\quad \mathbf{r}\in\Omega;\quad \left.\mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v})\right|_S=0,$$

$$B_u(\lambda)\mathbf{e}_j^{(N_x)}=\int_S\mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{v})dS,\quad j=\overline{1,N_x},$$

$$\lambda\mathbf{v}=\mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{v})+(L_3^{(F)}+\lambda L_4^{(F)})\mathbf{e}_j^{(N_y)},\mathbf{r}\in\Omega,$$

$$\left.(\mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v})+L_2^{(G)}\mathbf{e}_j^{(N_y)})\right|_S=0;\ C_u(\lambda)\mathbf{e}_j^{(N_y)}=\int_S\mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{v})dS,\quad j=\overline{1,N_y},$$

$$\mathbf{e}_j^{(N)}\in\mathbb{R}^N,\quad j=\overline{1,N};\quad \mathbf{e}_1^{(N)}=(1,0,...0)^T,\quad ...,\quad \mathbf{e}_N^{(N)}=(0,0,...1)^T.$$

Быстрый алгоритм проверки устойчивости позволяет эффективно исследовать устойчивость КДС [1–3]. В работе [1] найдено точное решение вспомогательной линейной краевой задачи и показана аналитичность функций $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ в правой комплексной полуплоскости и вблизи мнимой оси. В работе [3] в низкочастотной области выполнялось численное интегрирование линейной краевой задачи на основе проекционного метода Галеркина с проверкой аналитичности функций $D(\lambda)$

и $Q(\lambda)$ на основе принципа аргумента. Пусть, например, для функций $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{C}^{N_u}$ скалярное произведение и норма суть $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega$, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$. На основе теоремы об обратном операторе ([4, с. 119, теорема 1]) доказаны утверждения:

Теорема 1. *Пусть при* $\nu = 3, 4$

$$\left\| L_2^{(F)} \mathbf{e}_j^{(N_x)} \right\| < \infty, \quad j = \overline{1, N_x} \quad \left\| L_\nu^{(F)} \mathbf{e}_j^{(N_y)} \right\| < \infty, \quad j = \overline{1, N_y} \tag{2}$$

для любых функций

$$\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{C}, \quad \left\| \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}) \right\| < \infty, \quad \mathbb{L}^{(G)}(\mathbf{u}) \Big|_S = 0 \tag{3}$$

справедливо

$$\left| \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{u}) dS \right| < \infty, \tag{4}$$

существуют функции $\mathbf{v}_0^{(j)} : \Omega \to \mathbb{R}^{N_u}$, *такие, что*

$$\begin{gathered} \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v}_0^{(j)}) \Big|_S = -L_2^{(G)} \mathbf{e}_j^{(N_y)}, \quad \left\| \mathbf{v}_0^{(j)} \right\| < \infty, \\ \left\| \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{v}_0^{(j)}) \right\| < \infty, \quad \left| \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{v}_0^{(j)}) dS \right| < \infty, \quad j = \overline{1, N_y} \end{gathered} \tag{5}$$

и при $\lambda \in \bar{\Omega}_\lambda = \Omega_\lambda \cup \partial\Omega_\lambda \subset \mathbb{C}$ *для функций* (3)

$$\left\| \lambda \mathbf{u} - \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}) \right\| \geqslant m(\lambda) \|\mathbf{u}\|, \quad m(\lambda) > 0 \tag{6}$$

Тогда функции $D(\lambda)$ *и* $Q(\lambda)$ *— аналитические в области* Ω_λ.

Следствие 1. *Если математическая модель объектов управления с распределенными по пространству параметрами соответствует процессам теплопроводности или диффузии, т.е., наряду с* (2)–(5) *выполнено*

$$\begin{gathered} \mathbb{L}_1^{(F)} = \mathbb{L}_{v,1}^{(F)} - \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}, \\ \forall\ (\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^{N_u}) : \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u}) \Big|_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle > 0, \\ \forall\ (\mathbf{u}, \mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^{N_u}) : \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u}) \Big|_S = 0, \\ \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v}) \Big|_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\langle \mathbf{v}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \right\rangle = \left\langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{v}) \right\rangle, \\ \forall\ (\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^{N_u}) : \quad \|\mathbf{u}\| = 1, \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u}) \Big|_S = 0, \end{gathered}$$

$$\left\|\mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u})\right\| \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\left\langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,1}^{(F)}(\mathbf{u})\right\rangle\right| \ll \left\langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u})\right\rangle,$$

то при $|\lambda| \gg 1$, $0 < \alpha < \pi/2$, $\operatorname{Re}\lambda > -|\lambda|\sin\alpha$ *характеристический квазимногочлен* $D(\lambda)$ *и возмущающие квазимногочлены* $Q(\lambda)$ *будут аналитическими функциями* λ*.*

Утверждение, аналогичное следствию 1, справедливо для объектов управления с распределенными по пространству параметрами, соответствующих упругим средам с учетом внутреннего трения. Аналитичность в высокочастотной области позволила реализовать ряд параллельных алгоритмов параметрического синтеза КДС [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.

2. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* Моделирование, анализ и синтез комбинированных динамических систем : учеб. пособие. Саратов : ООО «Издательский Дом «Райт-Экспо», 2013. 144 с.

3. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Кононов В. В.* К устойчивости системы угловой стабилизации вращающегося упругого стержня под действием продольного ускорения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2013. № 5. С. 12–25.

4. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. М. : Высш. шк., 1982. 271 с.

5. *Андрейченко Д. К., Ерофтиев А. А., Мельничук Д. В.* Распараллеливание параметрического синтеза по схеме «Портфель задач» на основе технологии MPI // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 222–228.

УДК 517.53

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ Р. НЕВАНЛИННЫ ИЗ L^p-ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ[1]

Е. Г. Родикова (Брянск)
evheny@yandex.ru

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, D — единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ — множество всех функций, аналитических в D. Для любого $\alpha > -1$ определим класс S_α^p (см. [4]):

$$S_\alpha^p := \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 (1-r)^\alpha T^p(r,f)\,dr < +\infty \right\},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97508) и Минобрнауки РФ (проект № 1.1704.2014К).