и с неограниченной правой частью, при которых существуют решения (траектории) задачи Коши для такого дифференциального включения. Будут рассмотрены некоторые свойства траекторий дифференциального включения с неограниченной измеримо-псевдолипшицевой правой частью. Опираясь за полученные свойства, будет исследована задача на минимум функционала по множеству траекторий дифференциального включения, заданных на отрезке, со свободным правым концом. Для такой задачи будут представлены необходимые условия оптимальности в форме дифференциального включения Эйлера – Лагранжа.

Для случая, когда траектории дифференциального включения с неограниченной измеримо-псевдолипшицевой правой частью принимают значения в евклидовом конечномерном пространстве, будут представлены необходимые условия оптимальности для задачи минимизации функционала на множестве траекторий, заданных на отрезке с закрепленными левым и правым концами, а также для задачи быстродействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014. 524 с.

2. *Половинкин Е. С.* Дифференциальные включения с неограниченной правой частью и необходимые условия оптимальности // Оптимальное управление : сб. статей к 105-летию со дня рожд. акад. Л. С. Понтрягина. Тр. МИАН. Т. 291. М. : МАИК, 2015. С. 249–265.

УДК 517.518

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ХАРТМАНА – ВИНТНЕРА ДЛЯ СУММ РЯДОВ ПО СИНУСАМ С КВАЗИМОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ [1]

А. Ю. Попов, А. П. Солодов (Москва, РФ)

Напомним несколько утверждений относительно рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad \boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = 0. \tag{1}$$

Сумму ряда (1) (если он сходится в точке $x \in \mathbb{R}$) обозначим $g(\boldsymbol{b}, x)$. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k|b_k| < +\infty$, то $g(\boldsymbol{b}, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ и

$$g'(\boldsymbol{b}, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(\boldsymbol{b}, x)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k.$$

[1] Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417).

Если же

$$b_k \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k b_k = +\infty, \tag{2}$$

то предельное соотношение

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(\boldsymbol{b}, x)}{x} = +\infty, \tag{3}$$

вообще говоря, не выполняется. При каких дополнительных условиях на последовательность $\boldsymbol{b}$ (кроме неотрицательности её элементов) из (2) следует (3)? Хартман и Винтнер [1] доказали, что если $\boldsymbol{b}$ монотонна, то из (2) всегда следует (3) и, в частности, сумма ряда (1) положительна в некоторой правой полуокрестности нуля. Известно следующее обобщение понятия «$\boldsymbol{b}$ монотонна». Берётся неубывающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Через $\mathfrak{M}_\Lambda$ обозначим класс всех последовательностей $\boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ неотрицательных чисел, $b_1 > 0$, для которых

$$\frac{b_{k+1}}{\lambda_{k+1}} \leqslant \frac{b_k}{\lambda_k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$$

Если последовательность Λ постоянна, то получается класс невозрастающих и стремящихся к нулю последовательностей, который обозначим $\mathfrak{M}$. Как было сказано выше, справедлива импликация

$$(2) \Rightarrow (3) \quad \forall \boldsymbol{b} \in \mathfrak{M}. \tag{4}$$

Для каких последовательностей Λ в (4) можно заменить $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}_\Lambda$?

Теорема 1. *Для того чтобы была верна импликация*

$$(2) \Rightarrow (3) \quad \forall\, \boldsymbol{b} \in \mathfrak{M}_\Lambda$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяла двум следующим условиям:*

$$\lambda = \sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k = \lim_{k\to\infty} \lambda_k < +\infty, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda - \lambda_k) < +\infty. \tag{6}$$

Если же при условии (5) *ряд в* (6) *расходится, то существует такая последовательность* $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathfrak{M}_\Lambda$, *что* $\varliminf_{x\to 0+} g(\tilde{\boldsymbol{b}}, x)/x = -\infty$.

Итак, если последовательность Λ даже ограничена, но стремление λ_k к пределу λ «не слишком быстрое», то некоторые суммы рядов по синусам (1) с коэффициентами из $\mathfrak{M}_\Lambda$ принимают отрицательные значения в сколь угодно малой правой полуокрестности нуля. Должно ли выполняться предельное соотношение

$$\varliminf_{x\to 0+} g(b,x) \geqslant 0 \quad \forall\, \boldsymbol{b}\in\mathfrak{M}_\Lambda. \tag{7}$$

Теорема 2. *Если верно* (5) *и* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} k(\lambda-\lambda_k) < +\infty$*, то справедливо предельное соотнощение* (7)*. Если же при условии* (5) *имеем* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} k(\lambda-\lambda_k) = +\infty$*, то существует такая последовательность* $\tilde{\boldsymbol{b}}\in\mathfrak{M}_\Lambda$*, что* $\varliminf\limits_{x\to 0+} g(\boldsymbol{b},x) = -\infty$*.*

Оказывается, что отрицательная часть суммы ряда (1) с коэффициентами из $\mathfrak{M}_\Lambda$ даже в случае ограниченности Λ не обязана быть суммируемой на $(0,\pi)$!

Теорема 3. *Если верно (5) и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_k)/k < +\infty$*, то отрицательная часть суммы ряда* (1) *лежит в* $L(0,\pi)$*, какова бы ни была последовательность* $\boldsymbol{b}\in\mathfrak{M}_\Lambda$*. Если же* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_k)/k = +\infty$ *и последовательность* $\{\lambda_k\}$ *вогнута, то найдётся такая последовательность* $\tilde{\boldsymbol{b}}\in\mathfrak{M}_\Lambda$*, что отрицательная часть* $g(\boldsymbol{b},x)$ *не суммируема на* $(0,\pi)$*.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hartman P., Wintner A.* On sine series with monotone coefficients // J. London Math. Soc. 1953. T. 28, № 1. C. 102–104.

УДК 517.935.2

ОБ УСЛОВИЯХ АНАЛИТИЧНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО И ВОЗМУЩАЮЩИХ КВАЗИМНОГОЧЛЕНОВ КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М. С. Портенко, Д. В. Мельничук, Д. К. Андрейченко (Саратов, РФ)

msportenko@gmail.com, meldm007@gmail.com, kp_andreichenko@renet.ru

Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой математические модели технических систем в форме систем связанных посредством условий связи и граничных условий обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. КДС с входной и выходной вектор-функциями $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N_x}$ и $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N_y}$ рассмотрены в [1, 2]. Динамическая модель линеаризованной КДС сводится к матрице передаточных функций $\Phi(\lambda) = [Q_{kj}(\lambda)/D(\lambda)]$,