УДК 517.956+004.942

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ В МОДЕЛИ НАГЕЛЯ – ШРЕКЕНБЕРГА

А. В. Подорога, И. В. Тихонов (Москва, РФ)
anastasiapodoroga@gmail.com, ivtikh@mail.ru

При математическом описании процесса дорожного движения часто используют макроскопический подход, в рамках которого транспортный поток интерпретируют как специфический поток сплошной среды (см. [1]). Соответствующие исследования проводят на языке квазилинейных дифференциальных уравнений, записанных для неизвестной плотности потока. При этом возникает проблема неединственности решения задачи Коши, хорошо известная из общей теории (см. [2–4]). Обсудим проявления этого эффекта применительно к интересной модели Нагеля–Шрекенберга, введенной в работе [5] на основе данных компьютерного моделирования.

Следуя стандартной схеме [1], рассмотрим транспортный поток с плотностью $\rho = \rho(x,t)$, где $x \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$. Интенсивность движения потока обозначим через $q = q(x,t)$. Основное предположение состоит в наличии *фундаментальной диаграммы*, т. е. зависимости $q = Q(\rho)$. Здесь $Q(\rho)$ — непрерывная выпуклая вверх функция, заданная на промежутке $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_{\max}$. Дифференциальное уравнение дорожного движения имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Добавим начальное условие

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

с заданной кусочно непрерывной функцией $\rho_0(x)$, удовлетворяющей оценке $0 \leqslant \rho_0(x) \leqslant \rho_{\max}$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

В соответствии с [5] фундаментальную диаграмму возьмем в виде

$$Q(\rho) = \begin{cases} k_1\,\rho, & 0 \leqslant \rho \leqslant \rho^*, \\ k_2(\rho_{\max} - \rho), & \rho^* \leqslant \rho \leqslant \rho_{\max}. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\rho_{\max} > 0$ — максимально возможная плотность потока. Значение $\rho^* \in (0, \rho_{\max})$ соответствует «переходной» плотности от свободного движения к затрудненному. Коэффициенты $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ имеют вид

$$k_1 = \frac{q_{\max}}{\rho^*}, \qquad k_2 = \frac{q_{\max}}{\rho_{\max} - \rho^*}, \tag{4}$$

где $q_{\max} > 0$ — максимальное значение интенсивности q. Постоянные числа $\rho_{\max}$, ρ^*, $q_{\max}$ считаются параметрами диаграммы (3), (4).

Поскольку выражение (3) не дифференцируемо в точке $\rho = \rho^*$, то уравнение (1) следует понимать в обобщенном смысле. Так, кусочно непрерывная функция $\rho = \rho(x,t)$ называется *обобщенным решением* уравнения (1), если она удовлетворяет соотношению

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(x,t)\,dx = Q(\rho(\alpha,t)) - Q(\rho(\beta,t)) \tag{5}$$

для почти всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ при почти всех $t \geqslant 0$. Основные типы решений, характерные для квазилинейного уравнения (1) в модели Нагеля–Шрекенберга (3), (4), указаны в работе [6]. Обсудим более подробно пример неединственности решения задачи Коши (1), (2), коротко упомянутый в [6].

Рассмотрим задачу Коши (1), (2) с диаграммой (3), (4), взяв начальное условие

$$\rho_0(x) = \rho^*, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Покажем, что при выборе (6) поставленная задача будет иметь бесконечно много различных обобщенных решений помимо стационарного решения $\rho(x,t) \equiv \rho^*$.

Определим функцию

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho^+(x + k_2 t), & x \leqslant 0, \\ \rho^-(x - k_1 t), & x > 0. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь

$$\rho^+(s) = \begin{cases} \rho^*, & s \leqslant 0, \\ f(s), & s > 0, \end{cases} \qquad \rho^-(s) = \begin{cases} g(s), & s \leqslant 0, \\ \rho^*, & s > 0, \end{cases} \tag{8}$$

причем $\rho^* \leqslant f(s) \leqslant \rho_{\max}$ при $s > 0$, а $0 \leqslant g(s) \leqslant \rho^*$ при $s \leqslant 0$. Тогда справедлив следующий результат.

Утверждение. *Для того чтобы функция (7) с выражениями $\rho^+(s)$, $\rho^-(s)$ из формулы (8) удовлетворяла интегральному соотношению (5) необходимо и достаточно, чтобы кусочно непрерывные функции $f(s)$, $g(s)$, входящие в запись (8), для почти всех $s > 0$ подчинялись равенству*

$$f(s) = \rho_{\max} - \gamma g(-\gamma s), \tag{9}$$

с коэффициентом $\gamma = k_1/k_2$. При этом функция (7) удовлетворяет начальному условию $\rho(x,0) \equiv \rho^*$.

Будем выбирать теперь кусочно непрерывные функции $g(s)$ так, чтобы $0 \leqslant g(s) \leqslant \rho^*$ при $s \leqslant 0$ и $g(s) \not\equiv \rho^*$ при $s \leqslant 0$. Определяя соответствующие функции $f(s)$ по формуле (9), получим бесконечно много различных решений вида (7), (8) для задачи Коши с начальным условием (6).

Этот теоретический эффект неединственности допускает экспериментальную проверку на практике. При имитационном компьютерном моделировании однополосного дорожного движения с фундаментальной диаграммой Нагеля – Шрекенберга (см. [6, 7]) на однородных режимах, близких к значению ρ^*, наблюдается эффект неустойчивости. Однородный транспортный поток с такой переходной плотностью существует лишь конечное время, после чего однородность потока нарушается, и в нем появляются прямые и обратные волны, согласованные с теоретическим описанием (7)–(9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гасников А. В. и др.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков. Изд. 2-е, испр. и доп. М. : МЦНМО, 2013. 427 с.

2. *Олейник О. А.* Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // УМН. 1957. Т. 12, № 3. С. 3–73.

3. *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения с частными производными первого порядка. М. : Мех-мат МГУ, 1999. 96 с.

4. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск : Тамара Рожковская, 2003. 576 с.

5. *Nagel K., Schreckenberg M.* A cellular automaton model for freeway traffic // Journal de Physique I France. 1992. Vol. 2, № 12. P. 2221–2229.

6. *Подорога А. В., Тихонов И. В.* Квазилинейное уравнение дорожного движения и компьютерное моделирование // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2015 : материалы науч. конф. СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. С. 209–213.

7. *Подорога А. В.* Моделирование идеального транспортного потока на кольцевой автодороге // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XVI Междунар. науч. конф., посвящ. 75-летию проф. В. П. Дьяконова. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2015. Вып. 16. С. 35–38.

УДК 517.977

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ[1]

Е. С. Половинкин (Москва, РФ)
polovinkin@mail.mipt.ru

В докладе будут рассмотрены различные условия на дифференциальное включение со значениями в сепарабельном банаховом пространстве

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00295а).