9. *Плотников М. Г.* Вопросы единственности для кратных рядов Хаара // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 2. 97–116.

10. *Плотников М. Г.* О границе существования единственности для двумерных рядов Хаара // Изв. вузов. Матем. 2006. № 7. С. 57–64.

11. *Плотников М. ,Г., Плотникова Ю. А.* Разложение двоичных мер и объединение замкнутых $\mathcal{U}$-множеств для рядов по системе Хаара // Матем. сб. (в печати).

УДК 517.518.26+519.214.8

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ГЁЛЬДЕРОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЧТИ ВСЮДУ ФУНКЦИЙ

И. В. Подвигин (Новосибирск, РФ)

ipodvigin@math.nsc.ru

1. Пусть M — метрическое пространство с метрикой d, и μ — вероятностная мера на борелевской σ-алгебре подмножеств M. Обозначим класс гёльдеровских функций с показателем $\alpha \in (0,1]$ через $H_\alpha(M)$. Рассмотрим новый класс $\mathcal{F}_\alpha$, состоящий из всех интегрируемых по Лебегу функций $f : M \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $\delta > 0$ найдутся интегрируемые функции $g_1^\delta, g_2^\delta \in H_\alpha(M)$, для которых выполняются неравенства

$$g_1^\delta \le f \le g_2^\delta,$$

$$\int_M g_1^\delta(x)\, d\mu(x) + l(\delta) \ge \int_M f(x)\, d\mu(x) \ge \int_M g_2^\delta(x)\, \mu(x) - l(\delta),$$

где $l(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Ясно, что всякая интегрируемая по Лебегу гёльдеровская функция f принадлежит классу $\mathcal{F}_\alpha$. Запас гёльдеровских функций на метрическом пространстве M достаточно большой (не меньше чем мощность самого множества M), и интегрируемые среди них обязательно найдутся. Например, всюду постоянные функции или вида $f(x) = \sin(d^\alpha(x, x_0))$, $x_0 \in M, \alpha \in (0,1]$. Таким образом, класс $\mathcal{F}_\alpha$ для любого $\alpha \in (0,1]$ заведомо не пуст.

Следующая теорема, анонсированная в [1], дает описание всем ограниченным функциям из $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha \in (0,1]$.

Теорема 1. *Ограниченная функция f принадлежит классу $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, тогда и только тогда, когда она непрерывна μ-п.в. на M.*

Доказательство теоремы 1 основано на построении функций g_1^δ и g_2^δ для каждой ограниченной непрерывной μ-п.в. функции f, которое осуществляется применением часто используемой в различных задачах конструкции инфимальной (супремальной) конволюции (см., например, [2, гл. 12]). А именно, положим для любых $\alpha \in (0, 1]$, $\delta > 0$ и $x \in M$

$$g_1^\delta(x) = \inf_{y \in M}(f(y) + 2M_f \delta^{-\alpha} d^\alpha(x, y)),$$

$$g_2^\delta(x) = \sup_{y \in M}(f(y) - 2M_f \delta^{-\alpha} d^\alpha(x, y)),$$

где $M_f = \sup_{x \in M} |f(x)|$. Нетрудно проверить, что g_1^δ и g_2^δ, действительно, гёльдеровские и удовлетворяют выписанным выше соотношениям с

$$l(\delta) = \int_M \omega_f(\delta, x)\, d\mu(x),$$

где

$$\omega_f(\delta, x) = \sup_{d(x,y) \leq \delta} |f(x) - f(y)|,\ \delta > 0.$$

2. На основе полученной аппроксимации ограниченных непрерывных μ-п.в. функций можно для таких функции получать оценки вероятности больших уклонений эргодических средних относительно сохраняющего меру μ преобразования. Сформулируем этот результат более точно.

Пусть $T : M \to M$ — эргодическое сохраняющее меру μ преобразование. Для $f \in L_1(M)$, $x \in M, n \geq 1$ обозначим эргодические средние

$$A_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x),$$

и для каждого $\varepsilon > 0$ вероятности больших уклонений

$$\mathrm{p}_n^\varepsilon(f) = \mu \left\{ |A_n f - \int_M f\, d\mu| \geq \varepsilon \right\}.$$

Теорема 2. *Для любой ограниченной μ-п.в. непрерывной функции $f : M \to \mathbb{R}$ и любых $\delta > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$ найдутся гёльдеровские функции $g_1^\delta, g_2^\delta \in H_\alpha(M)$ и $l(\delta) > 0$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех $n \geq 1$*

$$\mathrm{p}_n^{\varepsilon + l(\delta)}(f) \leq \mathrm{p}_n^\varepsilon(g_1^\delta) + \mathrm{p}_n^\varepsilon(g_2^\delta),$$

где $l(\delta) = l_f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Большие уклонения и скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа: переход от гёльдеровости к непрерывности // ДАН. 2016. Т. 466. № 1 (в печати).

4. *Bauschke H. H., Combettes P. L.* Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. *CMS Books in Mathematics.* N. Y. : Springer, 2011. 468 p.