СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стейн И., Вейс Г.*, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 335 с.

2. *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения // Матем. сб. 1987. Т. 134, № 1. С. 93–107.

3. *Temlyakov V. N.* Nonlinear methods of approximation // Found. Comput. Math. 2003. Vol. 3. P. 33–107.

4. *Konig H.* $s$-numbers of Besov – Lorentz imbeddings // Math. Nacr. 1979. Vol. 91. P. 389–400.

5. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Наилучшие билинейные приближения функций из пространств Никольского – Бесова // Укр. матем. журн. 2012. Т. 64, № 5. С. 685–697.


УДК 517.984

# АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

**Г. Г. Акниев (Махачкала, РФ)**

hasan.akniyev@gmail.com

Пусть $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных $2\pi$-периодических функций с нормой $\|f\| = \max_x |f(x)|$.

Пусть $N \geq 2$ — целое положительное число, $u = u_N$ — вещественное число и

$$t_k = t_k^{(N)} = u + \frac{2\pi k}{N} \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

система узловых точек. Обозначим через

$$L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f, x) \quad (0 \leq n \leq N/2)$$

тригонометрический полином порядка $n$ с наименьшим квадратичным отклонением от $f$ на сетке $\omega_N = \{t_k\}_{k=0}^{N-1}$. Другими словами

$$L_{n,N}(f) = \inf \sum_{k=0}^{N-1} |f(t_k) - T_n(t_k)|^2$$

на множестве всех тригонометрических полиномов $T_n$ порядка $n$. В частности, $L_{[N/2],N}(f, x)$ — интерполяционный полином, совпадающий с функцией $f(x)$ в точках $\omega_N$. Легко показать, что $L_{n,N}(f, x)$ является частичной суммой дискретного ряда Фурье функции $f$ и представляется в виде

$$L_{n,N}(f, x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu^{(N)}(f) e^{i\nu x},$$

где
$$c_\nu^{(N)}(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)e^{-i\nu t_k}.$$
Далее, пусть
$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$$
— частичная сумма порядка $n$ ряда Фурье функции $f$, где
$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{i\nu t}dt.$$

В работе [1] доказано, что если ряд Фурье для функции $f$ сходится в точках $t_k = u + 2k\pi/N$, то имеет место равенство
$$L_{n,N}(f,x) = S_n(f,x) + R_{n,N}(f,x), \tag{1}$$
когда $2n < N$, где $S_n(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье для функции $f$ и
$$R_{n,N}(f,x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)\cos\mu N(u-t)f(t)dt.$$

Обозначим через $P_{2\pi}^m$ класс непрерывных $2\pi$-периодических кусочно-линейных функций, определённых следующим образом.

Пусть $m \geq 3$ — некоторое натуральное число и точки
$$-\pi = a_0 < a_1 < ... < a_m = \pi$$
делят отрезок $[-\pi,\pi]$ на $m$ отрезков $\Delta_i = [a_i, a_{i+1}]$, причем
$$f(x) = f_i(x) = A_i x + B_i, \quad x \in \Delta_i.$$
Заметим, что из непрерывности следует
$$f_i(a_{i+1}) = f_{i+1}(a_{i+1}), \quad f_0(-\pi) = f_{m-1}(\pi).$$

Задача состоит в оценке разности
$$|L_{n,N}(f,x) - f(x)| \tag{2}$$

на отрезке $[-\pi, \pi]$. Из (1)

$$|L_{n,N}(f,x) - f(x)| \le |S_n(f,x) - f(x)| + |R_{n,N}(f,x)|.$$

Оценим отдельно $|S_n(f,x) - f(x)|$ и $|R_{n,N}(f,x)|$. Обозначим через $C(\varepsilon)$ положительное число, зависящее только от $\varepsilon$, причем различное в разных местах. Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** *Для функций из $P_{2\pi}^m$ справедливы следующие оценки при приближении частичными суммами ряда Фурье:*

$$|f(x) - S_n(f,x)| = C(\varepsilon)\frac{m}{n}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$|f(x) - S_n(f,x)| = C(\varepsilon)\frac{m}{n^2}, \quad x \in \bigcup_{i=0}^{m-1}[a_i + \varepsilon, a_{i+1} - \varepsilon], \quad \varepsilon > 0.$$

**Теорема 2.** *Для остатка $R_{n,N}(f,x)$, где $f \in P_{2\pi}^m$, имеют место следующие оценки:*

$$|R_{n,N}(f,x)| = C(\varepsilon)\frac{m}{N}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$|R_{n,N}(f,x)| = C(\varepsilon)\frac{m}{N^2}, \quad x \in \bigcup_{i=0}^{m-1}[a_i + \varepsilon, a_{i+1} - \varepsilon], \quad \varepsilon > 0.$$

**Следствие.** *Для полиномов $L_{n,N}(f,x)$, где $f \in P_{2\pi}^m$, справедливы следующие оценки:*

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| = C(\varepsilon)\frac{m}{n}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| = C(\varepsilon)\frac{m}{n^2}, \quad x \in \bigcup_{i=0}^{m-1}[a_i + \varepsilon, a_{i+1} - \varepsilon], \quad \varepsilon > 0.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* On the best approximation and polynomials of the least quadratic deviation // Anal. Math. 1983. Vol. 9. P. 223–234.