6. *Гоголадзе Л. Д.* К вопросу восстановления коэффициентов сходящихся кратных функциональных рядов // Изв. РАН. Сер. матем. 2008. Т. 72, № 2. С. 83–90.

7. *Жеребъева Т. А.* Об одном классе множеств единственности для кратных рядов Уолша // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. № 2. С. 14–21.

8. *Плотников М. Г.* О множествах единственности для кратных рядов Уолша // Матем. заметки. 2007. Т. 81, вып. 2. С. 265–279.

9. *Плотников М. Г.* О кратных рядах Уолша, сходящихся по кубам // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 1. С. 61–78.

10. *Плотников М. Г.* Квазимеры на группе $G^m$, множества Дирихле и проблемы единственности для кратных рядов Уолша // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 12. С. 131–156.

11. *Lukomskii S. F.* On a U-set for multiple Walsh series // Anal. Math. 1992. Vol. 18, № 2. P. 127–138.

12. *Плотников М. Г.* Кратные ряды Уолша и множества Зигмунда // Матем. заметки. 2014. Т. 95, вып. 5. С. 750–762.

УДК 517.518

## ПРОБЛЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПЕРЕСТАВЛЕННЫХ КРАТНЫХ РЯДОВ ХААРА[1]

**М. Г. Плотников, Ю. А. Плотникова (Вологда, РФ)**
MGPlotnikov@gmail.com, JAPlotnikova@yandex.ru

В 1870 г. Кантор доказал [1, гл. 1], что *если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду на* $[0, 2\pi)$*, за исключением, быть может, точек некоторого конечного множества, то он является тривиальным рядом, то есть все его коэффициенты равны нулю.*

Теорема Кантора означает, что всякое конечное множество $A \subset \subset [0, 2\pi)$ является $\mathcal{U}$-множеством для тригонометрических рядов. Напомним, что множество $A \subset X$ называется *множеством единственности* (иначе, *$\mathcal{U}$-множеством*) для рядов по системе функций $\{f_n\}$, если любой сходящийся к нулю вне $A$ такой ряд является *тривиальным*, то есть все его коэффициенты равны нулю.

В 1964 г. появилось 4 работы (Арутюнян, Арутюнян – Талалян, Петровская, Скворцов), из результатов которых вытекало, что $\emptyset$ является $\mathcal{U}$-множеством для рядов по системе Хаара $\{H_n\}$. С другой стороны, любое одноточечное множество $A \subset [0, 1]$ не является $\mathcal{U}$-множеством (Фабер 1910, Арутюнян – Талалян 1964). Таким образом, в отличие от тригонометрического случая, только $\emptyset$ является $\mathcal{U}$-множеством для рядов Хаара. См. [2] о результатах этого абзаца.

Аналог теоремы Кантора для всюду сходящихся *по прямоугольникам* кратных рядов Хаара доказали, независимо, Скворцов, Эбралидзе

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417).

и Мовсисян [3–5]. Недавно в [6] была решена более общая задача о восстановлении коэффициентов таких рядов по их сумме.

В работах [7–10] изучались проблемы единственности для $\lambda$-*сходящихся* кратных рядов Хаара. В [7] и [9] доказано, что $\emptyset$ есть $\mathcal{U}$-множество для таких рядов, если $\lambda \geq 2$. Но единственность нарушается, если $\lambda$ близко к 1. Имеет место

**Теорема A** (см. [8].) *Для всякого $\lambda \in [1, \sqrt{2})$ найдется нетривиальный двойной ряд Хаара, $\lambda$-сходящийся к нулю всюду на $[0,1]^2$. В частности, существует двойной ряд Хаара, всюду сходящийся к нулю по квадратам.*

Последний результат оказался неожиданным. С другой стороны, пустое множество является $\mathcal{U}$-множеством для $\lambda$-сходящихся двойных рядов Хаара, если $\lambda > \sqrt{2}$ (см. [10]). Если же рассматривать переставленные двойные ряды Хаара, то для некоторых "хороших" перестановок неединственность имеет место даже если $\sqrt{2} < \lambda < 2$. Пусть $\mathbb{N}$ означает множество целых неотрицательных чисел.

**Теорема 1.** *Существуют биекции $U, V \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, сохраняющие все двоичные пачки $B_k \overset{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} \colon 2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1\}$, $k \in \mathbb{N}$, а также нетривиальный $(U \times V)$-переставленный двойной ряд Хаара $(\mathrm{S}^*) = \sum\limits_{n,m=0}^{\infty} a^*_{n,m} H_{U(n)}(x) H_{V(m)}(y)$, причем $(\mathrm{S}^*)$ сходится по прямоугольникам к нулю всюду на $[0,1]^2$, за исключением точки $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, а в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ он $\lambda$-сходится к нулю для каждого $\lambda \in [1, 2)$.*

**Следствие.** *Существуют биекции $U, V \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, сохраняющие все двоичные пачки $B_k$, а также нетривиальный $(U \times V)$-переставленный двойной ряд Хаара такой, что для всякого $\lambda \in [1, 2)$ он $\lambda$-сходится к 0.*

В связи с теоремой 1, ее следствием и результатами работ [8] и [10] интересно узнать ответы на следующие вопросы.

**Вопрос 1.** *Пусть $\mathbf{T} \colon \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}^d$ — произвольная биекция, сохраняющая все $d$-мерные двоичные пачки*

$$B_{\mathbf{k}} \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d : 2^{k_i} \leq n_i \leq 2^{k_i+1} - 1,\ i = 1, \ldots, d\},$$

$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$. *Является ли пустое множество $\mathcal{U}$-множеством для $\lambda$-сходящихся $\mathbf{T}$-переставленных $d$-кратных рядов Хаара*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} a_{n_1,\ldots,n_d} H_{\mathbf{T}(n_1,\ldots,n_d)}(x_1, \ldots, x_d)? \tag{1}$$

Мы предполагаем, что ответ на вопрос 1 утвердительный. Если это так, то условие $\lambda < 2$ в теореме 1 и ее следствии неулучшаемо.

**Вопрос 2.** *Возьмем произвольное* $\lambda \in [1, \sqrt{2}]$. *Существует ли биекция* $\mathbf{T}\colon \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}^d$, *сохраняющая все* $d$*-мерные двоичные пачки* $B_{\mathbf{k}}$ *и такая, что* $\emptyset$ *есть* $\mathcal{U}$*-множество для* $\lambda$*-сходящихся рядов* (1)?

Ниже рассматриваются $\mathcal{U}$-множества для классов рядов

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{n_d=0}^{\infty} a_{n_1,\ldots,n_d} H_{\mathbf{T}(n_1,\ldots,n_d)}(t_1, \ldots, t_d) \tag{2}$$

на $d$-мерной двоичной группе $\mathbb{G}^d$.

**Определение.** Скажем, что класс $\Theta$ рядов (2) *обладает свойством наследственности*, если он подчинен следующему условию. Предположим, что $(S)$ и $(S^*)$ — произвольные ряды вида (2) такие, что для $N$-ых кубических частичных сумм $S_N$ и $S_N^*$ рядов $(S)$ и $(S^*)$, соответственно, имеем $\left|S_{2^k}(\mathbf{t})\right| \le \left|S_{2^k}^*(\mathbf{t})\right|$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{t} \in \mathbb{G}^d$. Тогда если $(S^*) \in \Theta$, то $(S) \in \Theta$.

**Теорема 2** (типа Бари). *Пусть биекция* $\mathbf{T}\colon \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}^d$ *сохраняет все* $d$*-мерные двоичные пачки, а* $\Theta$ *— произвольный класс рядов* (2), *обладающий свойством наследственности. Если замкнутые множества* $A_i \subset \mathbb{G}^d$ $(i \in \mathbb{N})$ *являются* $\mathcal{U}$*-множествами для рядов* (2) *из класса* $\Theta$, *то их объединение также является таковым. В качестве сходимости можно рассматривать сходимость по прямоугольникам, сходимость по кубам или* $\lambda$*-сходимость при* $\lambda > 1$.

В [11] теорема 2 доказана для $\mathbf{T} \equiv \mathrm{id}$, но доказательство легко переносится на общий случай.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : ГИФМЛ, 1961. 936 с.

2. *Голубов Б. И.* Ряды по системе Хаара // Итоги науки. Сер. Математика. Матем. анал. 1970, 1971. С. 109–146.

3. *Скворцов В. А.* О множествах единственности для многомерных рядов Хаара // Матем. заметки. 1973. Т. 14(6). С. 789–798.

4. *Эбралидзе А. Д.* О единственности кратных рядов по системе Хаара // Сообщ. АН Груз. ССР. 1973. Т. 70, № 3. С. 537–539.

5. *Мовсисян Х. О.* О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН Армян. ССР. Сер. матем. 1974. Т. 9, № 1. С. 40–61.

6. *Skvortsov V. A., Tulone F.* Multidimensional dyadic Kurzweil – Henstock- and Perron-type integrals in the theory of Haar and Walsh series // J. Math. Anal. Appl. 2015. Vol. 421(2). P. 1502–1518.

7. *Плотников М. Г.* О единственности всюду сходящихся кратных рядов Хаара // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2001. № 1. С. 23–28.

8. *Плотников М. Г.* О нарушении единственности для двумерных рядов Хаара // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2003. № 4. 20–24.

9. *Плотников М. Г.* Вопросы единственности для кратных рядов Хаара // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 2. 97–116.

10. *Плотников М. Г.* О границе существования единственности для двумерных рядов Хаара // Изв. вузов. Матем. 2006. № 7. С. 57–64.

11. *Плотников М. ,Г., Плотникова Ю. А.* Разложение двоичных мер и объединение замкнутых $\mathcal{U}$-множеств для рядов по системе Хаара // Матем. сб. (в печати).

УДК 517.518.26+519.214.8

## ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ГЁЛЬДЕРОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЧТИ ВСЮДУ ФУНКЦИЙ

**И. В. Подвигин (Новосибирск, РФ)**
ipodvigin@math.nsc.ru

**1.** Пусть $M$ — метрическое пространство с метрикой $d$, и $\mu$ — вероятностная мера на борелевской $\sigma$-алгебре подмножеств $M$. Обозначим класс гёльдеровских функций с показателем $\alpha \in (0,1]$ через $H_\alpha(M)$. Рассмотрим новый класс $\mathcal{F}_\alpha$, состоящий из всех интегрируемых по Лебегу функций $f : M \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $\delta > 0$ найдутся интегрируемые функции $g_1^\delta, g_2^\delta \in H_\alpha(M)$, для которых выполняются неравенства

$$g_1^\delta \le f \le g_2^\delta,$$

$$\int_M g_1^\delta(x)\,d\mu(x) + l(\delta) \ge \int_M f(x)\,d\mu(x) \ge \int_M g_2^\delta(x)\,\mu(x) - l(\delta),$$

где $l(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Ясно, что всякая интегрируемая по Лебегу гёльдеровская функция $f$ принадлежит классу $\mathcal{F}_\alpha$. Запас гёльдеровских функций на метрическом пространстве $M$ достаточно большой (не меньше чем мощность самого множества $M$), и интегрируемые среди них обязательно найдутся. Например, всюду постоянные функции или вида $f(x) = \sin(d^\alpha(x, x_0))$, $x_0 \in M, \alpha \in (0,1]$. Таким образом, класс $\mathcal{F}_\alpha$ для любого $\alpha \in (0,1]$ заведомо не пуст.

Следующая теорема, анонсированная в [1], дает описание всем ограниченным функциям из $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha \in (0,1]$.

**Теорема 1.** *Ограниченная функция $f$ принадлежит классу $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, тогда и только тогда, когда она непрерывна $\mu$-п.в. на $M$.*

Доказательство теоремы 1 основано на построении функций $g_1^\delta$ и $g_2^\delta$ для каждой ограниченной непрерывной $\mu$-п.в. функции $f$, которое осуществляется применением часто используемой в различных задачах конструкции инфимальной (супремальной) конволюции (см., например, [2,