норм) $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}(\sigma,p)}$, $\sigma \in (0,\alpha)$, пространство $^*\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ будет локально выпуклым топологическим векторным пространством. Будем называть пространство $^*\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ предельным пространством Липшица.

Аналогично, пусть

$$^*\Lambda(\alpha,p) := \bigcap_{0<\sigma<\alpha} \Lambda(\sigma,p).$$

Множество $^*\Lambda(\alpha,p)$ является локально выпуклым топологическим векторным пространством с топологией, порожденной семейством норм $\|\cdot\|_{\Lambda(\sigma,p)}$, $\sigma \in (0,\alpha)$.

Из вложений (5) и (6) вытекает, что для любого $\alpha \in (0,1]$ имеются вложения $^*\Lambda(\alpha,p) \hookrightarrow {}^*\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ и $^*\mathrm{Lip}(\alpha,p) \hookrightarrow {}^*\Lambda(\alpha,p)$, откуда вытекает следующее следствие.

Следствие. *Для любого $\alpha \in (0,1]$ пространства $^*\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ и $^*\Lambda(\alpha,p)$ совпадают как топологические векторные пространства.*

Тем самым получено описание предельного пространства Липшица в терминах наилучших приближений. Отметим, что, вообще говоря, $\mathrm{Lip}(\alpha,p) \neq \Lambda(\alpha,p)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Платонов С. С.* О некоторых задачах теории приближения функций на бесконечномерном торе: аналоги теорем Джексона // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, вып. 6. С. 99–120.

2. *Платонов С. С.* О некоторых задачах теории приближения функций на бесконечномерном торе // Функциональные пространства и теория приближений функций : тез. докл. междунар. конф. Москва, 2015. С. 202–204.

УДК 517.518

КРАТНЫЕ РЯДЫ УОЛША – ПЭЛИ И МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ[1]

М. Г. Плотников (Вологда, РФ)
MGPlotnikov@gmail.com

В работе рассматриваются множества единственности для кратных рядов по системе Уолша $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ в нумерации Пэли [1].

Пусть $\{f_n\}$ — система функций, заданных на некотором множестве X. Напомним, что множество $A \subset X$ называется *множеством единственности* (иначе, *$\mathcal{U}$-множеством*) для рядов $\sum\limits_n a_n f_n(x)$, если любой сходящийся к нулю вне этого множества ряд является *тривиальным*, то есть имеет лишь нулевые коэффициенты.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417).

Множества единственности для кратных рядов Уолша при сходимости по прямоугольникам изучались в работах [2–7] и ряде других. Так, из результатов работ [2, 3] вытекает, что всякое счетное множество, и даже любое счетное объединение гиперплоскостей являются $\mathcal{U}$-множествами. В [4] найдены более широкие классы $\mathcal{U}$-множеств и доказано, что множество $A \subset [0,1]^{d-1}$ является $\mathcal{U}$-множеством для $(d-1)$-кратных рядов Уолша тогда и только тогда, когда $A \times [0,1]$ является $\mathcal{U}$-множеством для d-кратных рядов Уолша. Наиболее широкие известные классы $\mathcal{U}$-множеств для кратных рядов Уолша при сходимости по прямоугольникам построены Л. Д. Гоголадзе и Т. А. Жеребьевой (Своровска) [6, 7].

В [8–10] найдены $\mathcal{U}$-множества для d-кратных рядов Уолша

$$\sum_{n_1,\dots,n_d=0}^{\infty} b_{n_1,\dots,n_d} \prod_{l=1}^{d} W_{n_l}(t^l) \tag{1}$$

на d-мерной двоичной группе $\mathbb{G}^d$ при λ-сходимости и сходимости по кубам. Наиболее общие результаты в этом направлении содержатся в [10]. В частности, для всех указанных типов сходимости существуют совершенные $\mathcal{U}$-множества хаусдорфовой размерности d.

При этом для любого $\lambda \geq 1$ существуют $\mathcal{U}$-множества для рядов (1) при сходимости по прямоугольникам, не являющиеся таковыми при λ-сходимости [11].

Если же рассматривать кратные ряды Уолша не на группе $\mathbb{G}^d$, а на единичном кубе $[0,1]^d$, то неизвестно даже, *является ли пустое множество $\mathcal{U}$-множеством при λ-сходимости или сходимости по кубам.* Аналогичная проблема не решена и для кратных тригонометрических рядов.

Также остается нерешенной следующая фундаментальная для теории единственности ортогональных рядов проблема, приведенная Н. Н. Холщевниковой в 2002 г. [5].

Проблема 1. *Обязано ли каждое множество положительной меры не быть $\mathcal{U}$-множеством для кратных рядов Уолша или для кратных тригонометрических рядов?*

Для тригонометрических рядов примерно в то же время Проблему 1 привели Дж. М. Эш и Л. В. Жижиашвили. Проблема не решена ни для какого из вышеуказанных типов сходимости.

Хотя среди построенных в [8–10] несчетных $\mathcal{U}$-множеств имеются достаточно массивные множества, все они имеют достаточно жесткую арифметическую структуру. Естественным образом возникает вопрос: существуют ли несчетные $\mathcal{U}$-множества для кратных рядов Уолша при

λ-сходимости или сходимости по кубам, имеющие более простую структуру? В частности, являются ли $\mathcal{U}$-множествами гиперплоскости в $\mathbb{G}^d$ или их конечные либо счетные объединения? Частично ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $\lambda \geq 2$, A — конечное объединение гиперплоскостей в $\mathbb{G}^d$, параллельных координатным гиперплоскостям. Тогда A является $\mathcal{U}$-множеством для рядов* (1) *при λ-сходимости.*

Следующие результаты, доказанные в [12] и являющиеся аналогами для рядов (1) теоремы Зигмунда, являются попытками приблизиться к решению Проблемы 1.

Теорема 2. *Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ — произвольные стремящиеся к нулю и к ∞, соответственно, последовательности положительных чисел. Тогда для всякого $\delta > 0$ существует совершенное множество $H \subset \mathbb{G}^d$ меры Хаара большей, чем $1 - \delta$, обладающее следующим свойством. Любой ряд* (1), *сходящийся по двоичным кубам к нулю на множестве $\mathbb{G}^d \setminus H$ и такой, что*

$$|b_{n_1,\ldots,n_d}| \leq \varepsilon_{n_d}, \qquad n_1, \ldots, n_d = 0, 1, \ldots,$$

$$|n_u - n_d| \leq C_{n_d} \quad (u = 1, \ldots, d-1), \tag{2}$$

имеет все коэффициенты равными нулю.

Следствие. *В условиях теоремы 2 для всякого $\delta > 0$ найдется совершенное множество $H \subset \mathbb{G}^d$ меры Хаара большей, чем $1-\delta$, обладающее следующим свойством. Если коэффициенты ряда* (1), *сходящегося по прямоугольникам или по кубам к нулю на множестве $\mathbb{G}^d \setminus H$, удовлетворяют условию* (2), *то все они равны нулю.*

Условие (2) является весьма мягким ограничением на поведение коэффициентов рядов (1) в том числе потому, что оно накладывается только на коэффициенты, стоящие не слишком далеко от «главной диагонали». Попытка избавиться от него приводит к Проблеме 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения, 2-е изд. М. : ЛКИ, 2008. 352 с.

2. *Скворцов В. А.* О коэффициентах сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1973. № 6. С. 77–79.

3. *Мовсисян Х. О.* О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН Армян. ССР. Сер. матем. 1974. Т. 9, № 1. С. 40–61.

4. *Лукомский С. Ф.* О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша // Матем. сб. 1989. Т. 180, № 7. С. 937–945.

5. *Холщевникова Н. Н.* Объединение множеств единственности кратных рядов Уолша и тригонометрических // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 4. С. 135–160.

6. *Гоголадзе Л. Д.* К вопросу восстановления коэффициентов сходящихся кратных функциональных рядов // Изв. РАН. Сер. матем. 2008. Т. 72, № 2. С. 83–90.

7. *Жеребъева Т. А.* Об одном классе множеств единственности для кратных рядов Уолша // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. № 2. С. 14–21.

8. *Плотников М. Г.* О множествах единственности для кратных рядов Уолша // Матем. заметки. 2007. Т. 81, вып. 2. С. 265–279.

9. *Плотников М. Г.* О кратных рядах Уолша, сходящихся по кубам // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 1. С. 61–78.

10. *Плотников М. Г.* Квазимеры на группе G^m, множества Дирихле и проблемы единственности для кратных рядов Уолша // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 12. С. 131–156.

11. *Lukomskii S. F.* On a U-set for multiple Walsh series // Anal. Math. 1992. Vol. 18, № 2. P. 127–138.

12. *Плотников М. Г.* Кратные ряды Уолша и множества Зигмунда // Матем. заметки. 2014. Т. 95, вып. 5. С. 750–762.

УДК 517.518

ПРОБЛЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПЕРЕСТАВЛЕННЫХ КРАТНЫХ РЯДОВ ХААРА[1]

М. Г. Плотников, Ю. А. Плотникова (Вологда, РФ)
MGPlotnikov@gmail.com, JAPlotnikova@yandex.ru

В 1870 г. Кантор доказал [1, гл. 1], что *если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду на* $[0, 2\pi)$*, за исключением, быть может, точек некоторого конечного множества, то он является тривиальным рядом, то есть все его коэффициенты равны нулю.*

Теорема Кантора означает, что всякое конечное множество $A \subset \subset [0, 2\pi)$ является $\mathcal{U}$-множеством для тригонометрических рядов. Напомним, что множество $A \subset X$ называется *множеством единственности* (иначе, $\mathcal{U}$*-множеством*) для рядов по системе функций $\{f_n\}$, если любой сходящийся к нулю вне A такой ряд является *тривиальным*, то есть все его коэффициенты равны нулю.

В 1964 г. появилось 4 работы (Арутюнян, Арутюнян – Талалян, Петровская, Скворцов), из результатов которых вытекало, что $\emptyset$ является $\mathcal{U}$-множеством для рядов по системе Хаара $\{H_n\}$. С другой стороны, любое одноточечное множество $A \subset [0, 1]$ не является $\mathcal{U}$-множеством (Фабер 1910, Арутюнян – Талалян 1964). Таким образом, в отличие от тригонометрического случая, только $\emptyset$ является $\mathcal{U}$-множеством для рядов Хаара. См. [2] о результатах этого абзаца.

Аналог теоремы Кантора для всюду сходящихся *по прямоугольникам* кратных рядов Хаара доказали, независимо, Скворцов, Эбралидзе

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417).