и справедлива оценка

$$0.45 \cdot \frac{2^m}{m^2} < \mu_{2m} < 0.55 \cdot \frac{2^m}{m^2}, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad m \geqslant 8. \tag{9}$$

Соотношения (8), (9) показывают, что максимальный коэффициент в полиномах (4) растет с экспоненциальной скоростью, однако, скорость роста будет существенно меньшей, чем в аналогичном примере на стандартном отрезке $[0, 1]$ (ср. с [5, 6]).

Автор выражает признательность И. В. Тихонову за постановку задачи и В. Б. Шерстюкову за большую помощь в исследовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.; Л. : ГИТТЛ, 1949. 688 с.
2. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953. 130 p.
3. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Л. : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.
4. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Berlin : Springer-Verlag, 1993. 450 p.
5. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.
6. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.
7. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2015 : материалы науч. конф. СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. С. 115–121.
8. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 288–300.

УДК 517.984

ПРОСТРАНСТВА ЛИПШИЦА НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ТОРЕ

С. С. Платонов (Петрозаводск, РФ)
platonov@psu.karelia.ru

Будем считать, что одномерный тор совпадает с фактор-группой $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Элемент $x + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{R}$, будем обозначать через $\bar{x}$. Пусть $\mathbb{T}^\infty$ — прямое произведение счетного числа групп $\mathbb{T}$. Элементами группы $\mathbb{T}^\infty$ являются последовательности $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\}_{k=1}^\infty$, где $\bar{x}_k \in \mathbb{T}$.

Снабженная тихоновской топологией группа $\mathbb{T}^\infty$ является компактной топологической группой.

Пусть $d\mathbf{x}$ — элемент группы Хаара на группе $\mathbb{T}^\infty$, нормированной условием $\int_G 1\,d\mathbf{x} = 1$. Пусть $L_p(\mathbb{T}^\infty) = L_p(\mathbb{T}^\infty, d\mathbf{x})$, $1 \le p < \infty$, и $L_\infty(\mathbb{T}^\infty) = C(\mathbb{T}^\infty)$ комплексные Лебеговы банаховые пространства, $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L_p(\mathbb{T}^\infty)$.

Для $\bar{s} \in \mathbb{T}$ пусть $|\bar{s}|_\mathbb{T} := \min_{m\in\mathbb{Z}} |s - 2\pi m|$. Если $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\} \in \mathbb{T}^\infty$, то полагаем $|\mathbf{x}| := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|\bar{x}_k|_\mathbb{T}$. Отображение $\mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|$ задает квазинорму на группе $\mathbb{T}^\infty$.

Для любой функции $f(\mathbf{x})$ на группе $\mathbb{T}^\infty$ и для любого $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$ пусть

$$(\tau_\mathbf{h} f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} - \mathbf{h}).$$

Оператор $\tau_\mathbf{h}$ называется оператором сдвига. Для любой функции $f \in \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$ конечная разность $\Delta_\mathbf{h} f$ с шагом $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$ определяется формулой $\Delta_\mathbf{h} f := f - \tau_\mathbf{h} f$.

Для любых $\alpha \in (0, 1]$ и $p \in [1, +\infty]$ через $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ обозначим множество всех функций $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$, удовлетворяющих условию

$$\|\Delta_\mathbf{h} f\|_p \le A_f |\mathbf{h}|^\alpha, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty, \tag{1}$$

где A_f — некоторое число, не зависящее от $\mathbf{h}$.

Множество $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ является комплексным линейным пространством. Снабженное нормой

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,p)} := \|f\|_p + \sup_{\mathbf{h}\ne 0} |\mathbf{h}|^{-\alpha} \|\Delta_\mathbf{h} f\|_p \tag{2}$$

множество $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ является банаховым пространством, которое естественно назвать пространством Липшица на группе $\mathbb{T}^\infty$.

Естественным средством приближения функций на группе $\mathbb{T}^\infty$ (как и на любой компактной абелевой группе) являются линейные комбинации характеров. Опишем характеры группы $\mathbb{T}^\infty$. Пусть $\mathbb{Z}^\infty$ — множество всех целочисленных последовательностей. Элементы из $\mathbb{Z}^\infty$ имеют вид $\mathbf{n} = = \{n_k\}_{k=1}^\infty$, $n_k \in \mathbb{Z}$. Через $\mathbb{Z}^{(\infty)}$ обозначим подмножество в $\mathbb{Z}^\infty$, состоящее из всех финитных последовательностей, т. е. таких последовательностей $\mathbf{n}$ для которых $n_k = 0$ при $k > N$.

Характеры группы $\mathbb{T}^\infty$ задаются формулами

$$\chi_\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \exp(i(\sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k)),$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\mathbf{n} = \{n_k\} \in \mathbb{Z}^{(\infty)}$, $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\} \in \mathbb{T}^\infty$.

Обозначим через $\mathcal{P}(\mathbf{T}^\infty)$ комплексную линейную оболочку функций $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{(\infty)}$. Функции из $\mathcal{P}(\mathbf{T}^\infty)$ (будем называть их тригонометрическими полиномами на группе $\mathbb{T}^\infty$) будут служить средством приближения для функций из нормированных пространств $L_p(\mathbb{T}^\infty)$.

Для любого натурального числа N обозначим через $\mathcal{P}_N^*(\mathbb{T}^\infty)$ линейную оболочку всех характеров $\chi_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} = \{n_k\} \in \mathbb{Z}^{(\infty)}$, которые удовлетворяют условиям $|n_k| \le N/2^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Линейное подпространство $\mathcal{P}_N^*(\mathbb{T}^\infty)$ конечномерное, так как $n_k = 0$ при $k > \log_2 N + 1$.

Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$ пусть

$$E_N^*(f)_p := \sup\{\|f - \Phi\|_p : \Phi \in \mathcal{P}_N^*(\mathbb{T}^\infty)\}$$

— наилучшее приближение функции f функциями из $\mathcal{P}_N^*(\mathbb{T}^\infty)$.

Для любых $\alpha \in (0, 1]$ и $p \in [1, +\infty]$ обозначим через $\Lambda(\alpha, p)$ множество всех функций $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$, для которых наилучшие приближения $E_N^*(f)_p$ удовлетворяют условию

$$E_N^*(f)_p \le \frac{B_f}{N^\alpha}, \quad N = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

где B_f — некоторое положительное число.

Множество $\Lambda(\alpha, p)$ является комплексным линейным пространством. Снабженное нормой

$$\|f\|_{\Lambda(\alpha,p)} := \|f\|_p + \sup_{N \in \mathbb{N}} N^\alpha \, E_N^*(f)_p \tag{4}$$

пространство $\Lambda(\alpha, p)$ является банаховым пространством.

Если $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — топологические векторные пространства, то будем писать, что $\mathcal{F}_1 \hookrightarrow \mathcal{F}_2$ ($\mathcal{F}_1$ вложено в $\mathcal{F}_2$), если $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ и это вложение линейное и непрерывное.

Теорема. *Для банаховых пространств* $\mathrm{Lip}(\alpha_1, p)$ *и* $\Lambda(\alpha_2, p)$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1])$ *имеются следующие вложения*

$$\Lambda(\alpha_2, p) \hookrightarrow \mathrm{Lip}(\alpha_1, p) \quad \forall \alpha_1 < \alpha_2; \tag{5}$$

$$\mathrm{Lip}(\alpha_1, p) \hookrightarrow \Lambda(\alpha_2, p) \quad \forall \alpha_2 < \alpha_1. \tag{6}$$

Для любого $\alpha \in (0, 1]$ пусть

$${}^*\mathrm{Lip}(\alpha, p) := \bigcap_{0 < \sigma < \alpha} \mathrm{Lip}(\sigma, p). \tag{7}$$

Множество ${}^*\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ является комплексным линейным пространством. Снабженное топологией, порожденной семейством полунорм (даже норм) $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}(\sigma,p)}$, $\sigma \in (0,\alpha)$, пространство $^*\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ будет локально выпуклым топологическим векторным пространством. Будем называть пространство $^*\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ предельным пространством Липшица.

Аналогично, пусть

$$^*\Lambda(\alpha,p) := \bigcap_{0<\sigma<\alpha} \Lambda(\sigma,p).$$

Множество $^*\Lambda(\alpha,p)$ является локально выпуклым топологическим векторным пространством с топологией, порожденной семейством норм $\|\cdot\|_{\Lambda(\sigma,p)}$, $\sigma \in (0,\alpha)$.

Из вложений (5) и (6) вытекает, что для любого $\alpha \in (0,1]$ имеются вложения $^*\Lambda(\alpha,p) \hookrightarrow {}^*\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ и $^*\mathrm{Lip}(\alpha,p) \hookrightarrow {}^*\Lambda(\alpha,p)$, откуда вытекает следующее следствие.

Следствие. *Для любого $\alpha \in (0,1]$ пространства $^*\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ и $^*\Lambda(\alpha,p)$ совпадают как топологические векторные пространства.*

Тем самым получено описание предельного пространства Липшица в терминах наилучших приближений. Отметим, что, вообще говоря, $\mathrm{Lip}(\alpha,p) \neq \Lambda(\alpha,p)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Платонов С. С.* О некоторых задачах теории приближения функций на бесконечномерном торе: аналоги теорем Джексона // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, вып. 6. С. 99–120.

2. *Платонов С. С.* О некоторых задачах теории приближения функций на бесконечномерном торе // Функциональные пространства и теория приближений функций : тез. докл. междунар. конф. Москва, 2015. С. 202–204.

УДК 517.518

КРАТНЫЕ РЯДЫ УОЛША – ПЭЛИ И МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ[1]

М. Г. Плотников (Вологда, РФ)
MGPlotnikov@gmail.com

В работе рассматриваются множества единственности для кратных рядов по системе Уолша $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ в нумерации Пэли [1].

Пусть $\{f_n\}$ — система функций, заданных на некотором множестве X. Напомним, что множество $A \subset X$ называется *множеством единственности* (иначе, *$\mathcal{U}$-множеством*) для рядов $\sum\limits_n a_n f_n(x)$, если любой сходящийся к нулю вне этого множества ряд является *тривиальным*, то есть имеет лишь нулевые коэффициенты.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417).