сдвига $\alpha(t)$ является дробно-линейной, то краевая задача $\boldsymbol{K}_3$ решается в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М. : Наука, 1977. 448 с.

2. *Расулов К. М.* Трехэлементная односторонняя краевая задача со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в круге // Изв. СмолГУ. 2008. № 2. С. 94–104.

УДК 517.518.82

О СКОРОСТИ РОСТА МАКСИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПОЛИНОМАХ БЕРНШТЕЙНА, ВЗЯТЫХ ОТ СИММЕТРИЧНОГО МОДУЛЯ НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

М. А. Петросова (Москва, РФ)

petrosova05@mail.ru

Теория классических полиномов Бернштейна составляет важный раздел конструктивного анализа (см. [1–4]). Подробный обзор основных результатов, полученных на стандартном отрезке $[0,1]$, представлен в [5]. Там, в частности, отмечен специальный эффект, связанный с экспоненциальным ростом коэффициентов полиномов Бернштейна при явной алгебраической записи. Этот эффект наглядно проявляется на примере простейших кусочно–линейных функций типа модуля (см. также [6, 7]). Покажем, что при переходе к симметричному отрезку $[-1,1]$ качественный характер эффекта сохранится, но количественные оценки изменятся.

Для функции $f \in C[-1,1]$ полиномы Бернштейна определяют формулой

$$B_n(f,x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k \,(1+x)^k \,(1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

При выборе

$$f(x) = |x|, \qquad x \in [-1,1], \qquad (2)$$

полиномы (1) подчинены *правилу склеивания* (см. [8]), согласно которому $B_{2m+1}(f,x) = B_{2m}(f,x)$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Поэтому в примере (2) достаточно ограничиться изучением полиномов (1) только с четными номерами $n = 2m$. Такие полиномы коротко обозначим

$$B_{2m}(x) = 2^{-2m} \sum_{k=0}^{2m} \left|\frac{k}{m} - 1\right| C_{2m}^k \,(1+x)^k \,(1-x)^{2m-k}, \quad m \in \mathbb{N}. \qquad (3)$$

Можно показать, что явная алгебраическая запись полиномов (3) по степеням переменной x имеет вид

$$B_{2m}(x) = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m} \left[1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\, C_m^k\, x^{2k}\right], \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Рассмотрим вопрос о скорости роста максимального (по модулю) коэффициента в записи (4) при увеличении значения m. Другими словами, исследуем рост величины

$$\mu_{2m} = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |a_{2m,2k}|, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Здесь

$$a_{2m,2k} = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m}\, (-1)^{k-1}\, \beta_m(k), \quad m \in \mathbb{N}, \quad k = 1, \ldots, m\,, \tag{6}$$

с числами

$$\beta_m(k) = \frac{1}{2k-1}\, C_m^k, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad k = 1, \ldots, m\,. \tag{7}$$

Для решения поставленной задачи требуется при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ найти максимальное из чисел (7).

Отметим следующие закономерности, действующие для (7) в зависимости от выбора $m \in \mathbb{N}$ при изменении $k = 1, \ldots, m$.

1. При любом фиксированном $m \in \{1, \ldots, 6\}$ числа (7) образуют конечную строго убывающую последовательность.

2. При $m = 7$ числа (7) образуют особый набор

$$7, \quad 7, \quad 7, \quad 5, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{7}{11}, \quad \frac{1}{13},$$

где первые три элемента совпадают, а затем элементы строго убывают.

3. При любом фиксированном $m \geqslant 8$ конечная последовательность (7) строго возрастает вплоть до $k = [(m-1)/2]$, а затем строго убывает.

Перечисленные закономерности позволяют показать, что первые полиномы Бернштейна (4), отвечающие значениям m от 1 до 7, являются исключительными, и рост коэффициентов (6) в их записи почти не наблюдается. При $m \geqslant 8$ тенденция меняется. Основной результат состоит в следующем.

Теорема. *Пусть величина μ_{2m} определена по формуле* (5), *как максимальное абсолютное значение среди коэффициентов* (6), *взятых из полиномов* (4). *Тогда верна асимптотическая формула*

$$\mu_{2m} \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{2^m}{m^2}, \qquad m \to \infty, \tag{8}$$

и справедлива оценка

$$0.45 \cdot \frac{2^m}{m^2} < \mu_{2m} < 0.55 \cdot \frac{2^m}{m^2}, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad m \geqslant 8. \tag{9}$$

Соотношения (8), (9) показывают, что максимальный коэффициент в полиномах (4) растет с экспоненциальной скоростью, однако, скорость роста будет существенно меньшей, чем в аналогичном примере на стандартном отрезке $[0, 1]$ (ср. с $[5, 6]$).

Автор выражает признательность И. В. Тихонову за постановку задачи и В. Б. Шерстюкову за большую помощь в исследовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.; Л. : ГИТТЛ, 1949. 688 с.

2. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953. 130 p.

3. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Л. : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.

4. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Berlin : Springer-Verlag, 1993. 450 p.

5. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.

6. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

7. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2015 : материалы науч. конф. СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. С. 115–121.

8. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 288–300.

УДК 517.984

ПРОСТРАНСТВА ЛИПШИЦА НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ТОРЕ

С. С. Платонов (Петрозаводск, РФ)
platonov@psu.karelia.ru

Будем считать, что одномерный тор совпадает с фактор-группой $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Элемент $x + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{R}$, будем обозначать через $\bar{x}$. Пусть $\mathbb{T}^\infty$ — прямое произведение счетного числа групп $\mathbb{T}$. Элементами группы $\mathbb{T}^\infty$ являются последовательности $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\}_{k=1}^\infty$, где $\bar{x}_k \in \mathbb{T}$.