УДК 519.853

СЛУЧАЙ РЕДУКЦИИ ЗАДАЧИ О РАВНОМЕРНОЙ ОЦЕНКЕ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ШАРОМ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Осипцев М. А., Дудов С. И. (Саратов, РФ)
Osipcevma@gmail.com, DudovSI@info.sgu.ru

Пусть D — заданное выпуклое тело из конечномерного пространства $\mathbb{R}^p$, а $n(x)$ — некоторая норма на $\mathbb{R}^p$. Рассматривается задача

$$\phi(x,r) \equiv h(D,\, Bn(x,r)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}. \tag{1}$$

Здесь $Bn(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x-y) \leqslant r\}$ — шар радиуса r с центром в точке x,

$$h(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} n(a-b),\, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} n(a-b)\}$$

— расстояние Хаусдорфа между множествами A и B, индуцированное нормой $n(\cdot)$

Задача (1) своими решениями при значениях r из определенных диапазонов выражает решения известных задач по шаровым оценкам выпуклого тела [1, 2].

Целевую функцию задачи (1) можно представить в виде (см. [3])

$$h(D, Bn(x,r) = \max\{R(x) - r, P(x) + r\} \qquad (2),$$

где

$$R(x) = \max_{y\in D} n(x-y), \quad P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x),$$
$$\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}, \quad \rho_A(x) = \min_{y\in A} n(x-y).$$

Предположим, что шар используемой нормы является многогранником и тогда норма представима в виде

$$n(x) = \max_{i=\overline{1,m}} |\langle B_i,\, x\rangle|. \tag{3}$$

Будем считать, что и выпуклое тело D является многогранником, заданным в виде

$$D = \{y \in \mathbb{R}^p :\, \langle A_j,\, y\rangle \le a_j,\, j = \overline{1,\, l}\}, \tag{4}$$

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

Тогда множество $G(\alpha) = D + Bn(0_p, \alpha)$ также является многогранником. Используя (3)–(4) можно найти его представление в виде

$$G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle C_j,\, y\rangle \le d_j(\alpha),\, j = \overline{1,k}\},$$

причем нормали C_j к граничным гиперплоскостям многогранника $G(\alpha)$ при $\alpha > 0$ не зависят от α.

Без потери общности считаем далее, что $n^*(C_j) = 1,\ j = \overline{1,k}$, где $n^*(x) = \max\limits_{n(v)\leqslant 1}\langle v,\, x\rangle$ –полярная норма. Набор $\{C_j : j = \overline{1,k}\}$ содержит с себе наборы $\{B_i/n^*(B_i) : i = \overline{1,m}\}$, $\{A_i/n^*(A_i) : i = \overline{1,l}\}$, но может содержать и другие элементы.

Лемма. *Имеют место формулы*

$$R(x) = \max_{i=\overline{1,m}} \max\{\langle B_i,\, x\rangle - b_{i1},\, b_{i2} - \langle B_i,\, x\rangle\} \tag{5}$$

$$P(x) = \max_{j=\overline{1,k}}\{\langle C_j,\, x\rangle - c_j\}, \tag{6}$$

где $b_{i1} = \min\limits_{y\in D}\langle B_i,\, y\rangle$, $b_{i2} = \max\limits_{y\in D}\langle B_i,\, y\rangle$, $c_j = \max\limits_{y\in D}\langle C_j,\, y\rangle$.

Формулы (2), (5) и (6) позволяют записать задачу (1) в виде

$$\phi(x,\, r) = \max_{\substack{j=\overline{1,k}\\ i=\overline{1,m}}}\{\langle B_i,\, x\rangle - b_{i_1} - r,\, b_{i_2} - \langle B_i,\, x\rangle - r,\, \langle C_j,\, x\rangle - c_j + r\} \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}, \tag{7}$$

Используя (7) можно доказать, что справедлива

Теорема *Задача* (1) *эквивалентна задаче*

$$\begin{cases} z \to \min \\ \langle B_i,\, x\rangle - b_{i_1} - r \le z, \quad i = \overline{1,m}, \\ b_{i_2} - \langle B_i,\, x\rangle - r \le z, \quad i = \overline{1,m}, \\ \langle C_j,\, x\rangle - c_j + r \le z, \quad j = \overline{1,k} \end{cases} \tag{8}$$

При этом, если x^* — одно из решений задачи (1), *то* $\widehat{x^*} = (x^*,\, z^*) \in \mathbb{R}^{p+1}$, *где* $z^* = \phi(x^*,\, r)$ *— одно из решений* (8). *И наоборот, если* $\widehat{x^*} = (x^*,\, z^*)$ *— одно из решений задачи* (8), *то* x^* *— одно из решений задачи* (1), *а* $z^* = \phi(x^*,\, r)$ *– оптимальное значение целевой функции* $\phi(x, r)$.

В итоге мы можем предложить следующий подход к получению приближённого решения задачи (1). Следует аппроксимировать выпуклое тело многогранником, представив его в виде (4), а также аппроксимировать единичный шар нормы $n(\cdot)$, представив его в виде $Bn(0_p,\, 1) = \{x \in \mathbb{R}^p : \langle \pm B_i,\, x\rangle \le 1,\, i = \overline{1,m}\}$.

Отметим, наличие широкого спектра методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел (см., напр., обзор [4]). После этого остаётся решить задачу линейного программирования вида (8). Конечно при этом возникает вопрос об устойчивости решения задачи (1) и его чувствительности к погрешности приближения тела D и единичного шара нормы многогранниками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М. : Фазис, 2002.

2. *Дудов С.И.* Систематизация задач по шаровым оценкам выпуклого компакта // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 9. С. 99–120.

3.*Дудов С. И., Златорунская И. В.* Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 13–38.

4. *Бронштейн Е. М.* Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // СМФН. 2007. Т. 22. С. 5–37.

УДК 517.54

ОЦЕНКА ШВАРЦИАНА ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Н. А. Павлов (Владивосток, РФ)

npamcs@gmail.com

Пусть функция f голоморфна в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < < 1\}$ и удовлетворяет условию $|f(z)| < 1$ при $z \in U$. Точка z, $|z| = 1$, называется неподвижной граничной точкой функции f, если существует угловой предел $\angle \lim\limits_{\zeta \to z} f(\zeta) = z$. По лемме Жюлиа – Вольфа существование углового предела $f(z)$ в неподвижной граничной точке z влечет за собой существование угловой производной $f'(z)$ [1, с. 79–83]. В недавней статье [2, теорема 6] получена нижняя оценка $f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})$, зависящая от величины $\Phi(f(0))$. Здесь Φ есть дробно-линейный автоморфизм круга U, такой, что $\Phi(f(0)) \in (0, 1)$, $\Phi(e^{\pm i\theta}) = e^{\pm i\theta}$. В данной работе устанавливается точное неравенство, включающее произведение $f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})$ и производную Шварца, вычисленную в точке $z = 0$. Следующее утверждение получено методами теории потенциала [3].

Теорема. *Для любой голоморфной и однолистной в круге U функции f с неподвижными граничными точками $e^{\pm i\theta}$, $\theta \in (0, \pi)$ выполняется неравенство*

$$|S_f(0)| \leq 6\left(1 - \frac{|f'(0)|^2}{(1 - |f(0)|^2)^2}\right) - 3\log|f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})| -$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-11-00022).