СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Насыров С. Р.* Нахождение полинома, униформизирующего заданную компактную риманову поверхность // Матем. заметки. 2012. Т. 91(4). С. 597–607.

2. *Насыров С. Р.* Однопараметрические семейства многолистных функций и римановых поверхностей // Совр. методы теории функций и смежные проблемы : материалы междунар. конф. Воронеж. зим. матем. шк. (27 января – 2 февраля 2015 г.). Воронеж : Издат. дом ВГУ, 2015. С. 83–85.

УДК 517.988

ВАРИАНТЫ ДИСКРЕТНОЙ ФАЗОВОЙ ПРОБЛЕМЫ[1]

С. Я. Новиков (Самара, РФ)

nvks@samsu.ru

Решением дискретной фазовой проблемы занимаются в последнее десятилетие многие исследователи и научные группы. В работе [1] предпринята попытка установить связи между различными вариантами постановок и решений возникающих в этом направлении задач. Это предварительный вариант статьи и в нем остается много мест, требующих дополнительных уточнений.

Пусть $\mathbb{H}^M$ обозначает одно из пространств $\mathbb{R}^M$ или $\mathbb{C}^M$. Векторы $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_M)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_M)$ имеют, по определению, *одинаковые фазы*, если для всех $i = 1, \ldots, M$ имеем

$$\mathrm{ph}(a_i) = \mathrm{ph}(b_i).$$

Каждую из координат представляем в полярной форме $a_i = |a_i|\, e^{i\mathrm{ph}(a_i)}$. Число 0 не имеет фазы, поэтому, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют одинаковые фазы, то $a_i = 0$ тогда и только тогда, когда $b_i = 0$.

Рассматриваются два подхода к решению фазовой проблемы.

Определение 1. Пусть $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ — набор векторов в $\mathbb{H}^M$ (соответственно, $\{P_i\}_{i=1}^N$ — набор ортопроекторов в $\mathbb{H}^M$) и пусть для любых $x, y \in \mathbb{H}^M$ выполняются равенства:

$$|\langle x, \varphi_i\rangle| = |\langle y, \varphi_i\rangle|\,,\ i = 1, \ldots, N.$$

(соответственно, $\|P_i x\| = \|P_i y\|,\ i = 1, \ldots, N$).

1. Если отсюда следует существование числа θ с $|\theta| = 1$ такого, что x и θy имеют одинаковые фазы, то говорят, что Φ *восстанавливает фазы (phase retrieval)* (соответственно, $\{P_i\}_{i=1}^N$ *восстанавливает фазы*).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания, проект № 204

2. Если отсюда следует существование числа θ с $|\theta| = 1$ такого, что $x = \theta y$, то говорят, что Φ *восстанавливает без фаз (phaseless reconstruction).*

Если Φ восстанавливает фазы, то $\mathrm{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^N = \mathbb{H}^M$, то есть Φ является фреймом пространства $\mathbb{H}^M$. Если предположить противное, то найдется $0 \neq x \in \mathbb{H}^M$ такой, что

$$\langle x, \varphi_i \rangle = \langle y, \varphi_i \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, N.$$

и фазы векторов не совпадают.

Теорема 1 [2, 3]. *Пусть набор векторов $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{H}^M$ восстанавливает без фаз. Тогда Φ обладает свойством альтернативной полноты. В пространстве $\mathbb{R}^M$ восстановление без фаз и альтернативная полнота эквивалентны.*

Определение 2. Набор векторов $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N$ в $\mathbb{H}^M$ называется *альтернативно полным* (АП) если для любого $S \subseteq \{1, \ldots, N\}$ либо $\{\varphi_n\}_{n \in S}$, либо $\{\varphi_n\}_{n \in S^c}$ полно в $\mathbb{H}^M$.

Теорема 2 [1]. *Пусть набор проекторов $\{P_i\}_{n=1}^N$ на подпространства $\{W_i\}_{n=1}^N$ восстанавливает фазы. Тогда семейство $\{\varphi_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{n_i,d_i}$, состоящее из ортонормированных базисов $\{\varphi_{i,j}\}_{j=1}^{d_i}$ подпространств W_i, обладает свойством альтернативной полноты.*

Итогом работы [1] является эквивалентность свойств восстановления фаз и восстановления без фаз как в $\mathbb{R}^M$, так и в $\mathbb{C}^M$.

Определение 3. Набор векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в $\mathbb{H}^M$ *слабо восстанавливает фазы*, если из равенств

$$|\langle x, \varphi_i \rangle| = |\langle y, \varphi_i \rangle|,\ i = 1, \ldots, N$$

следует существование θ с $|\theta| = 1$ такого, что

$$\mathrm{ph}(x_i) = \theta \mathrm{ph}(y_i)$$

для всех $i = 1, \ldots, M$ таких, что $x_i \neq 0 \neq y_i$.

В пространстве $\mathbb{R}^M$ построен пример набора векторов, который слабо восстанавливает фазы, и не восстанавливает фазы в смысле определения 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Botelho-Andrade S., Casazza P. G., Nguyen H. V., Tremain J. C.* Phase retrieval verses phaseless reconstruction. Available online: arxiv:1507.05815.

2. *Balan R., Casazza P., Edidin D.* On signal reconstruction without phase // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2006. Vol. 20. P. 345–356.

3. *Новиков С. Я.* Восстановление сигнала по модулям измерений // Проблемы передачи информации. 2015. Т. 51, вып. 4.