СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брейтон Р. К., Хэтчел Г. Д., Санджованни-Винчентелли А. Л.* Обзор методов оптимального проектирования интегральных схем // ТИИЭР. 1981. Т. 69, №10. С. 180–215.

2. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М. : Наука, 1990.

УДК 517.5

ОЦЕНКИ БИЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

Г. Акишев (Караганда, РК)

akishev@ksu.kz

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, ..., x_m)$ с вещественными координатами; $I^m = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m;\ 0 \leq x_j \leq 2\pi;\ j = 1, ..., m\}$.

Пространством Лоренца $L_{q,\theta}(I^m)$ называется множество всех измеримых по Лебегу 2π-периодических функций для которых

$$\|f\|_{q,\theta} = \left\{\frac{\theta}{q}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t f^*(\tau)d\tau\right)^{\theta} t^{\theta(\frac{1}{q}-1)-1}dt\right\}^{\frac{1}{\theta}} < +\infty,$$

$$1 \leq q < +\infty, \quad 1 \leq \theta < +\infty,$$

где $f^*(\tau)$ не возрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$ (см. [1, с. 216]). В случае $\theta = q$, $L_{q,q}(I^m) = L_q(I^m)$ — пространство Лебега.

Пусть $V_l(f, \bar{x})$ кратные средние Валле – Пуссена функции $f \in L_{p,\theta}(I^m)$ и положим

$$\sigma_0(f, \bar{x}) = V_1(f, \bar{x}), \quad \sigma_s(f, \bar{x}) = V_{2^s}(f, \bar{x}) - V_{2^{s-1}}(f, \bar{x}), \quad s = 1, 2, ...$$

Пусть $1 < p,\ \theta < \infty$, $1 \leq \tau \leq \infty$ и $r > 0$. Рассматривается класс Никольского – Бесова

$$B^r_{p,\theta,\tau} = \left\{f \in L_{p,\theta}(I^m) : \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta}\|\sigma_s(f)\|^{\tau}_{p,\theta}\right)^{\frac{1}{\tau}} \leq 1\right\}.$$

Для функции $f \in L_{p,\theta}(\mathbb{I}^{2m})$ рассмтривается наилучшее билинейное приближение порядка $M \in \mathbb{N}$ (см. [2, 3]):

$$\tau_M(f)_{p,\theta} = \inf_{u_j(\bar{x}), v_j(\bar{y})} \|f(\bar{x}, \bar{y}) - \sum_{j=1}^{M} u_j(\bar{x})v_j(\bar{y})\|_{p,\theta},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 5129/ГФ4 Министерства образования и науки РК.

где $u_j \in L_{p,\theta}(\mathbb{I}^m)$, $v_j \in L_{p,\theta}(\mathbb{I}^m)$. При $M = 0$ считается , что $\tau_0(f)_{p,\theta} = \|f\|_{p,\theta}$.

Если задан класс $F \subset L_{p,\theta}(\mathbb{I}^{2m})$, то положим

$$\tau_M(F)_{p,\theta} = \sup_{f\in F} \tau_M(f)_{p,\theta}.$$

Оценкам порядка величин $\tau_M(F)_q$ в случае когда F класс Соболева W_p^r или Никольского – Бесова $B_{p,\theta}^r$ посвящены статьи В. Н. Темлякова [2, 3], Э. С. Белинского, М-Б. А. Бабаева, А. С. Романюка.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le \theta_1, \theta_2 < \infty$, $1 \le \tau \le \infty$.

1. Если $1 < p \le 2 < q < \infty$, $\frac{r}{m} > \frac{2}{p}$, *то*

$$\tau_M(B^r_{p,\theta_1,\tau})_{q,\theta_2} \asymp M^{-\frac{r}{m}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

2. Если $1 < p < q \le 2$, $\theta_1 \le \theta_2$, $\frac{\theta_2}{q} \le \frac{\theta_1}{p}$, $\frac{r}{m} > 2(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, *то*

$$\tau_M(B^r_{p,\theta_1,\tau})_{q,\theta_2} \le CM^{-\frac{r}{m}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

В случае $q \ge \theta_2$ *оценка точна по порядку.*

3. Если $2 < p < q < \infty$, $r > m$, *то*

$$\tau_M(B^r_{p,\theta_1,\tau})_{q,\theta_2} \le CM^{-\frac{r}{m}}.$$

В доказательстве этой теоремы используется аналог неравенства Марцинкевича – Зигмунда для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца, который доказал H. Konig [4].

Пусть задан тригонометрический полином

$$T_{\bar N}(\bar x) = \sum_{|k_j|\le N_j, j=1,\dots m} c_{\bar k} e^{i\langle \bar k, \bar x\rangle}$$

и $\bar x^{\bar n} = (x_1^{\bar n}, ..., x_m^{\bar n})$, $x_j^{n_j} = \frac{\pi n_j}{2N_j}$, $n_j = 1, ..., 4N_j$, $j = 1, ..., m$.

Пусть $M_m = \prod_{j=1}^m 4N_j$, $\{T^*_{\bar N}(j)\}_{j=1}^{M_m}$ — невозрастающая перестановка чисел $|T_{\bar N}(\bar x^{\bar n})|$.

Лемма (см. [4]). *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$. *Тогда для любого тригонометрического полинома* $T_{\bar N}$ *справедливо соотношение*

$$\|T_{\bar N}\|_{p,\theta} \asymp \Big(\prod_{j=1}^m \frac{\pi n_j}{2N_j}\Big)^{\frac{1}{p}} \Big\{\sum_{j=1}^{M_m} \Big(T^*_{\bar N}(j)\Big)^{\theta} j^{\frac{\theta}{p}-1}\Big\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Замечание. В случае $\theta_1 = p$, $\theta_2 = q$ из теоремы 1 следуют результаты А. С. Романюка и В. С. Романюка [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стейн И., Вейс Г.*, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 335 с.

2. *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения // Матем. сб. 1987. Т. 134, № 1. С. 93–107.

3. *Temlyakov V. N.* Nonlinear methods of approximation // Found. Comput. Math. 2003. Vol. 3. P. 33–107.

4. *Konig H.* s-numbers of Besov – Lorentz imbeddings // Math. Nacr. 1979. Vol. 91. P. 389–400.

5. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Наилучшие билинейные приближения функций из пространств Никольского – Бесова // Укр. матем. журн. 2012. Т. 64, № 5. С. 685–697.

УДК 517.984

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Г. Г. Акниев (Махачкала, РФ)

hasan.akniyev@gmail.com

Пусть $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой $\|f\| = \max_x |f(x)|$.

Пусть $N \geq 2$ — целое положительное число, $u = u_N$ — вещественное число и

$$t_k = t_k^{(N)} = u + \frac{2\pi k}{N} \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

система узловых точек. Обозначим через

$$L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f, x) \quad (0 \leq n \leq N/2)$$

тригонометрический полином порядка n с наименьшим квадратичным отклонением от f на сетке $\omega_N = \{t_k\}_{k=0}^{N-1}$. Другими словами

$$L_{n,N}(f) = \inf \sum_{k=0}^{N-1} |f(t_k) - T_n(t_k)|^2$$

на множестве всех тригонометрических полиномов T_n порядка n. В частности, $L_{[N/2],N}(f, x)$ — интерполяционный полином, совпадающий с функцией $f(x)$ в точках ω_N. Легко показать, что $L_{n,N}(f, x)$ является частичной суммой дискретного ряда Фурье функции f и представляется в виде

$$L_{n,N}(f, x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu^{(N)}(f) e^{i\nu x},$$