Основным результатом является

Теорема. *Пусть Q ограничено.*
(I) Если множество нулей $\hat{\mu}$ конечно или пусто, то оператор $T_{\hat{\mu}} : A(Q+K) \to A(Q)$ имеет ЛНПО.
(II) Пусть оператор $T_{\mu} : A(Q+K) \to A(Q)$ сюръективен и множество нулей $\hat{\mu}$ бесконечно. Следующие утверждения равносильны:

(i) $T_{\hat{\mu}} : A(Q+K) \to A(Q)$ имеет ЛНПО.

(ii) Функция $D_{\operatorname{int} Q}$ ограничена на каждом компактном подмножестве $A_{\hat{\mu}} \cap S_0$ и функция $1/D_{\overline{Q}}$ ограничена на некоторой окрестности множества $A_{\hat{\mu}} \cap S_{\omega}$ в S.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Meise R., Taylor B. A., Vogt D.* Characterization of the linear partial differential operators with constant coefficients that admit a continuous linear right inverse // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1990. Vol. 40. P. 619–655.
2. *Momm S.* Convolution equations on the analityc functions on convex domains in the plane // Bull. Sci. Math. 1994. Vol. 118. P. 259–270.
3. *Momm S.* A critical growth rate of the pluricomplex Green function // Duke Math. J. Vol. 72. 1993, P. 487–502.
4. *Melikhov S. N., Momm S.* Solutions operators for convolution equations on the germs of analytic functions on compact convex sets of $\mathbb{C}^N$ // Studia. Math. 1995. Vol. 117. P. 79–99.
5. *Мелихов С. Н., Момм З.* О линейном непрерывном правом обратном для оператора свертки на пространствах ростков аналитических функций на выпуклых компактах в $\mathbb{C}$ // Изв. вузов. Матем. 1997. № 5. С. 38–48.
6. *Melikhov S. N., Momm S.* Analytic solutions of convolution equations on convex sets with an obstacle in the boundary // Math. Scand. 2000. Vol. 86. P. 293–319.
7. *Мелихов С. Н.* Аналитические решения дифференциальных уравнений бесконечного порядка на выпуклых множествах с препятствием, открытым на границе // Исследования по комплексному анализу,теории операторов и математическому моделированию. Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2004. С. 141–162.
8. *Momm S.* Convex univalent functions and continuos linear right inverses // J. Functional Analysis. 1992. Vol. 103. P. 85–103.

УДК 517.51+517.98

БАЗИСНОСТЬ ПО РИССУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ ТИПА УОЛША[1]

В. А. Миронов, П. А. Терехин (Саратов, РФ)
v.a.mironoff@gmail.com, terekhinpa@mail.ru

Дадим определение аффинных систем функций типа Уолша [1].

[1]Работа подготовлена в рамках выполнения проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К). Второй автор также поддержан РФФИ (проект № 13-01-00102).

Пусть функция $f(x), x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f \in L^2(0,1), \qquad \int_0^1 f(x)d(x) = 0, \qquad f(x+1) = f(x).$$

Обозначим пространство таких функций $L_0^2 = L_0^2(0,1)$.

Определим в L_0^2 линейные операторы

$$W_0 f(x) = f(2x), \qquad W_1 f(x) = r(x) f(2x),$$

где $r(x)$ — периодическая функция Хаара – Радемахера – Уолша.

Пусть $\mathbb{A}$ — множество всех конечных наборов $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$, $k = 0, 1, \ldots$, состоящих из нулей и единиц: $a_\nu = 0$ или $1, 0 \leq \nu \leq k-1$. Длину такого набора α обозначим $|\alpha| = k$.

Воспользуемся взаимно однозначным соответствием между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством $\mathbb{A}$, определяемым бинарным разложением $n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu + 2^k$. Будем использовать указанное соответствие для замены индекса $x_\alpha = x(\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}) = x_n$.

Для каждого набора $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{A}$ обозначим

$$W^\alpha = W_{\alpha_0} \ldots W_{\alpha_{k-1}}$$

произведение операторов (первым действует оператор $W_{\alpha_{k-1}}$, последним — W_{α_0}; при $k = 0$ пустое произведение полагаем равным тождественному оператору I).

Для любой функции $f \in L_0^2$ положим

$$f_\alpha(t) := W^\alpha f(t) = W_{\alpha_0} \ldots W_{\alpha_{k-1}} f(t)$$

$$= f(2^k t) r^{\alpha_{k-1}}(2^{k-1} t) \ldots r^{\alpha_0}(t) = f(2^k t) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(t),$$

где $r_k(t) = r(2^k t), k = 0, 1, \ldots,$ — система Радемахера.

Семейство функций $\{W^\alpha f\}$ назовём *аффинной системой функций типа Уолша*, порожденной функцией $f \in L_0^2$, и будем обозначать $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ или $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ с учетом замены индекса.

Система функций $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется *биортогонально сопряженной* к системе $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, если:

$$(f_i, f_j^*) = \int_0^1 f_i(t) f_j(t) dt = \delta_i j, \qquad i, j \in \mathbb{N}.$$

Разложим функцию $f \in L_0^2$ в ряд Фурье – Уолша

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n w_n$$

и предположим, что f нормирована условием $x_1 = (f, w_1) = 1$.

По числовой последовательности коэффициентов Фурье – Уолша $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ построим новую числовую последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ следующим образом: пусть $y_1 = 1$ и все $\alpha \in \mathbb{A}$, $|\alpha| \geq 1$, определяются из рекуррентных соотношений

$$\sum_{\alpha=\beta\gamma} x_\beta y_\gamma = \sum_{\nu=0}^{k} x(\alpha_0, \ldots, \alpha_{\nu-1}) y(\alpha_\nu, \ldots, \alpha_{k-1}) = 0,$$

где набор $\alpha\beta = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{l-1})$ представляет собой конкатенацию наборов $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$ и $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_{l-1})$.

Теорема 1 [2]. *Семейство функций*

$$f_n^* = f_\alpha^* = \sum_{\alpha=\beta\gamma} y_\gamma w_\beta = \sum_{\nu=0}^{k} y(\alpha_0, \ldots, \alpha_{\nu-1}) w(\alpha_\nu, \ldots, \alpha_{k-1}) \qquad (1)$$

является биортогонально сопряженной системой к аффинной системе функций типа Уолша $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Представление (1) показывает, что функции f_n^* биортогонально сопряженной системы являются полиномами порядка n по системе Уолша.

Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ — тригонометрическая аффинная система функций типа Уолша, порожденная функцией

$$f(t) = \frac{\pi}{2} \sin(2\pi t).$$

Теорема 2 [3]. *Тригонометрическая аффинная система функций типа Уолша* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *образует базис Рисса в пространстве* L_0^2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терехин П. А.* Аффинные системы функций типа Уолша. Ортогонализация и пополнение // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 1. С. 395–400.

2. *Миронов В. А., Терехин П. А.* Минимальность аффинных систем функций типа Уолша // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 42–44.

3. *Миронов В. А., Терехин П. А.* Тригонометрическая аффинная система функций типа Уолша // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17.