7. *Лежнев В. Г., Марковский А. Н.* Метод базисных потенциалов для неоднородного бигармонического уравнения // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2008. № 8/1 (67). С. 127–139.

УДК 517.9

О ПРОБЛЕМЕ ШВАРЦА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ НА ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

С. Н. Мелихов (Ростов-на-Дону, Владикавказ РФ)
melih@math.rsu.ru
Л. В. Стефаненко (Ростов-на-Дону РФ)
stefanenko.lv@mail.ru

В середине 50-х годов прошлого века Л. Шварц поставил проблему существования линейного непрерывного правого обратного (ЛНПО) к дифференциальному оператору в частных производных конечного порядка с постоянными коэффициентами в пространствах бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(\Omega)$ и распределений $D'(\Omega)$ на открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Для выпуклых областей Ω она была решена в работе Р. Майзе, Б.А. Тейлора, Д. Фогта [1].

С начала 60-х годов прошлого века аналогичная проблема решалась для операторов свертки (в частности, дифференциальных операторов бесконечного порядка с постоянными коэффициентами) в пространствах всех (ростков) функций, аналитических на множествах Q в $\mathbb{C}^N$. К настоящему времени эта задача решена для выпуклых областей Q и компактов Q [4, 5] в $\mathbb{C}^N$ и, более общим образом, для выпуклых локально замкнутых множеств $Q \subseteq \mathbb{C}^N$ [6].

В докладе речь идет о существовании ЛНПО к задаваемому некоторым аналитическим функционалом μ сюрьективному оператору свертки T_μ, действующему в пространствах ростков всех функций, аналитических на выпуклых подмножествах $Q \subseteq \mathbb{C}$ с непустой внутренностью, обладающих счетным базисом окрестностей из выпуклых областей. В случае, когда носителем функционала μ является точка и Q ограничено, указанная проблема решена в [7].

Далее Q — собственное выпуклое подмножество $\mathbb{C}$ с непустой внутренностью, обладающее базисом окрестностей, состоящим из выпуклых областей Q_n таких, что $Q_{n+1} \subseteq Q_n$, $n \in \mathbb{N}$. Для существования такого базиса необходимо и достаточно, чтобы множество $\omega := Q \cap (\partial Q)$ было компактно и любая опорная прямая к $\overline{Q}$ — замыканию Q — не пересекала одновременно множество ω и $(\partial Q) \setminus \omega$. При этом символ ∂Q обозначает границу Q. Пусть $A(Q_n)$ — пространство Фреше всех аналитических в Q_n

функций; $A(Q) := \mathrm{ind}_{n\to}A(Q_n)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на Q.

Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$. Базисом окрестностей множества $Q+K$ является последовательность $(Q_n+K)_{n\in\mathbb{N}}$. Положим $A(Q+K) := = \mathrm{ind}_{n\to}A(Q_n+K)$. Для линейного непрерывного на $A(K)$ функционала μ оператор свертки

$$T_\mu(f)(z) := \mu_t(f(t+z)),\ f \in A(Q+K),$$

линейно и непрерывно отображает $A(Q+K)$ в $A(Q)$. Пусть множество нулей $V(\hat{\mu})$ функции $\hat{\mu}(z) := \mu_t(\exp(zt))$, $z \in \mathbb{C}$, бесконечно; $V(\hat{\mu}) := = \{z_j \mid j \in \mathbb{N}\}, |z_j| \to \infty$ ($z_j \neq z_k$, $j \neq k$). Через $A_{\hat{\mu}}$ обозначим множество всех предельных точек последовательности $\{z_j/|z_j| \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Приведем сведения о некоторых характеристиках конформных отображений, связанных с выпуклыми областями и компактами. Далее $S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Для множества $M \subseteq \mathbb{C}$ символ H_M обозначает опорную функцию M: $H_M(z) := \sup\limits_{t\in M} \mathrm{Re}(tz)$, $z \in \mathbb{C}$.

Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, φ — конформное отображение единичного круга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ на G. Для $r \in (0,1)$ положим $G_r := \varphi(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r\})$. Компакты G_r выпуклы. Через H_r обозначим опорную функцию G_r. Согласно [8] определена функция

$$D_G(z) := \lim_{r\to 1-0} \frac{H_G(z) - H_r(z)}{1-r} \in (0,+\infty],\ |z| = 1.$$

Пусть G — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, отличный от точки, ψ — конформное отображение $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ на $\mathbb{C}\backslash G$ такое, что $\psi(\infty) = \infty$. Для $r > 1$ компакты $G_r := \mathbb{C}\backslash\psi(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\})$ выпуклы. Пусть H_r — опорная функция G_r. Согласно [5] определена функция

$$D_G(z) := \lim_{r\to 1+0} \frac{H_r(z) - H_G(z)}{r-1} \in [0,+\infty),\ |z| = 1.$$

Введем множество опорных направлений, соответствующих опорным точкам из $\omega_0 := (\partial Q) \setminus \omega$:

$$S_0 := \{a \in S \mid \mathrm{Re}(wa) = H_Q(a) \ \text{для некоторого}\ w \in \omega_0\}.$$

Заметим, что множество S_0 открыто в S, если Q ограничено. Положим $S_\omega := S \setminus S_0$.

Основным результатом является

Теорема. *Пусть Q ограничено.*
(I) Если множество нулей $\hat{\mu}$ конечно или пусто, то оператор $T_{\hat{\mu}} : A(Q+K) \to A(Q)$ имеет ЛНПО.
(II) Пусть оператор $T_{\mu} : A(Q+K) \to A(Q)$ сюрьективен и множество нулей $\hat{\mu}$ бесконечно. Следующие утверждения равносильны:

(i) $T_{\hat{\mu}} : A(Q+K) \to A(Q)$ имеет ЛНПО.

(ii) Функция $D_{\operatorname{int} Q}$ ограничена на каждом компактном подмножестве $A_{\hat{\mu}} \cap S_0$ и функция $1/D_{\overline{Q}}$ ограничена на некоторой окрестности множества $A_{\hat{\mu}} \cap S_{\omega}$ в S.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Meise R., Taylor B. A., Vogt D.* Characterization of the linear partial differential operators with constant coefficients that admit a continuous linear right inverse // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1990. Vol. 40. P. 619–655.

2. *Momm S.* Convolution equations on the analityc functions on convex domains in the plane // Bull. Sci. Math. 1994. Vol. 118. P. 259–270.

3. *Momm S.* A critical growth rate of the pluricomplex Green function // Duke Math. J. Vol. 72. 1993, P. 487–502.

4. *Melikhov S. N., Momm S.* Solutions operators for convolution equations on the germs of analytic functions on compact convex sets of $\mathbb{C}^N$ // Studia. Math. 1995. Vol. 117. P. 79–99.

5. *Мелихов С. Н., Момм З.* О линейном непрерывном правом обратном для оператора свертки на пространствах ростков аналитических функций на выпуклых компактах в $\mathbb{C}$ // Изв. вузов. Матем. 1997. № 5. С. 38–48.

6. *Melikhov S. N., Momm S.* Analytic solutions of convolution equations on convex sets with an obstacle in the boundary // Math. Scand. 2000. Vol. 86. P. 293–319.

7. *Мелихов С. Н.* Аналитические решения дифференциальных уравнений бесконечного порядка на выпуклых множествах с препятствием, открытым на границе // Исследования по комплексному анализу,теории операторов и математическому моделированию. Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2004. С. 141–162.

8. *Momm S.* Convex univalent functions and continuos linear right inverses // J. Functional Analysis. 1992. Vol. 103. P. 85–103.

УДК 517.51+517.98

БАЗИСНОСТЬ ПО РИССУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ ТИПА УОЛША[1]

В. А. Миронов, П. А. Терехин (Саратов, РФ)
v.a.mironoff@gmail.com, terekhinpa@mail.ru

Дадим определение аффинных систем функций типа Уолша [1].

[1]Работа подготовлена в рамках выполнения проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014K). Второй автор также поддержан РФФИ (проект № 13-01-00102).