5. *Овчинников И. С.* Простые концы пространственных областей // Тр. Том. ун-та. 1966. Т. 189. С. 96–104.

6. *Малютина А. Н., Елизарова М. А.* О связи классов отображений с s-усредненной характеристикой с некоторыми классами пространственных отображений // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2010. № 4 (12). С. 18–31.

УДК 517.956.223

БИГАРМОНИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ ФУНКЦИИ

А. Н. Марковский (Краснодар, РФ)
mark@kubsu.ru

Доказывается полнота сдвигов фундаментальных решений бигармонического уравнения; приводится обобщение утверждения П. С. Новикова о разложении пространства $L_2(Q)$ в прямую сумму гармонического, бигармонического и новиковского подпространств. Предложен алгоритм задачи выделения бигармонической составляющей.

1. Рассмотрим однородное бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u(x) = 0,\ \Delta^2 = \Delta(\Delta)$$

в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей Ляпунова $S = \partial Q$, $S \in C^{1+\alpha}$,$(\alpha > 0)$, где Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$, представляющим собой декартовы координаты точек $(x_1, x_2, ..., x_n)$ евклидова n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, $(n \geqslant 2)$.

Известно [1, 2], что фундаментальные решения бигармонического уравнения имеют вид:

а) в случае нечетных $n > 1$ и четных n, для которых $n > 4$,

$$E_{2,n}(x) = d_{2,n} \left|x\right|^{4-n}, \quad d_{2,n} = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{8(4-n)(2-n)}; \tag{1}$$

б) в случае четных n, $n \leqslant 4$,

$$E_{2,n}(x) = d_{2,n} \left|x\right|^{4-n} \ln\left|x\right|,\ d_{2,n} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} - 1}{8\Gamma(3-\frac{n}{2})(\pi)^{n/2}}. \tag{2}$$

2. Обозначим $G(Q)$ — подпространство гармонических в Q функций из $L_2(Q)$. Ниже приводится лемма П. С. Новикова разложения пространства $L_2(Q)$, данная в статье [3] для трехмерного случая. Общий случай $(n \geqslant 2)$ приводится в работах [4, 5].

Лемма (П. С. Новиков). *Если Q — ограниченная область с границей Ляпунова $S = \partial Q$, то пространство $L_2(Q)$ имеет следующее разложение в прямую сумму:*

$$L_2(Q) = G(Q) \oplus N(Q),$$

где $G(Q)$ — подпространство гармонических в Q функций, а функция $h(x)$ принадлежит $N(Q)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_Q h(y) E_{1,n}(x-y)dy = 0, \quad x \in Q^+.$$

3. Обозначим

$$G_2(Q) \subset L_2(Q),$$

множество *строго* бигармонических функций, то есть функций, удовлетворяющих бигармоническому уравнению и не удовлетворяющих уравнению Лапласа в Q. Можно показать, что множество $G_2(Q)$ замкнуто в норме $L_2(Q)$ и, таким образом, является собственным подпространством $L_2(Q)$. Нетрудно видеть, что $G_2(Q) \subset N(Q)$.

Обозначим,

$$Q^+ := \mathbb{R}^n \backslash \overline{Q},$$

и рассмотрим ограниченную, отделенную от границы S последовательность точек

$$z^k \in Q^+ \ (Q), \quad k = 1, 2, ...,$$

удовлетворяющую условию единственности гармонических функций; будем называть такую последовательность *базисной*.

Обозначим

$$\gamma_{2,k}(x) = E_{2,n}(z^k - x), \quad x \in Q, \quad k = 1, 2, ...$$

Лемма 1. *Система функций $\gamma_{2,k}(x)$, $k = 1, 2, ...$, линейно независима и замкнута в подпространстве $G_2(Q)$, если последовательность $z^k \in$ $\in Q^+$ является базисной.*

Полнота и линейная независимость системы $\gamma_{1,k}(x)$, $k = 1, 2, ...$, в гармоническом подпространстве $G(Q)$, доказана в [4, 5].

Нетрудно показать, что множество единственности гармонических функций является множеством единственности бигармонических функций.

4. Разложение пространства $L_2(Q)$ в прямую сумму.

Теорема 1. *В условиях леммы Новикова*

$$L_2(Q) = G(Q) \oplus G_2(Q) \oplus N_2(Q),$$

где $G(Q)$ и $G_2(Q)$ — подпространства гармонических и бигармонических в Q функций, а функция $h(x)$ принадлежит $N_2(Q)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_Q h(y) E_{2,n}(x-y) dy = 0, \quad x \in Q^+.$$

5. Алгоритм определения бигармонической проекции. Пусть задана $f(x) \in L_2(Q)$ и требуется определить (приближенно) ее проекцию $g_2(x)$ на бигармоничекое подпространство $G_2(Q)$. По теореме $f(x) = g_1(x) + g_2(x) + h(x)$. Обозначим $g_2^N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \gamma_{2,k}(x)$, проекцию на подпространство, натянутое на $\gamma_{2,k}(x)$, $k = 1, 2, ..., N$, тогда $g_2(x) = g_2^N(x) + \rho_N(x)$, $\rho_N \perp \gamma_{2,k}$, $k = 1, 2, ..., N$, $\rho_N \to 0$ при $N \to \infty$ и

$$f(x) = g_1(x) + g_2^N(x) + \rho_N(x) + h(x).$$

Умножая последнее скалярно на $\gamma_{2,m}$, $m = 1, 2, ..., N$, имеем систему линейных уравнений с невырожденной матрицей Грама

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \left(\gamma_{2,k}, \gamma_{2,m}\right) = \left(f, \gamma_{2,m}\right), \quad m = 1, 2, ..., N.$$

Задача выделения гармоничекой составляющей функции рассматривалась в [6]; алгоритм метода базисных потенциалов для бигармонической задачи представлен в [7]. Определение гармонической и бигармонической проекций может быть использовано, например, в задаче идентификации цифровых изображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1988. 512 с.

2. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М. : Наука, 1974. 808 с.

3. *Новиков П. С.* Об единственности решения обратной задачи потенциала // ДАН СССР. 1938. Т. XVIII, № 3. С. 165–168.

4. *Лежнев А. В., Лежнев В. Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар : КубГУ, 2009. 111 с.

5. *Лежнев М. В.* Задачи и алгоритмы плоскопараллельных течений. Краснодар : КубГУ, 2009. 134 с.

6. *Лежнев В. Г.* Выделение гармонической составляющей // Численный анализ: теория, приложения, программы. М. : МГУ, 1999. С. 90–95.

7. *Лежнев В. Г., Марковский А. Н.* Метод базисных потенциалов для неоднородного бигармонического уравнения // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2008. № 8/1 (67). С. 127–139.

УДК 517.9

О ПРОБЛЕМЕ ШВАРЦА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ НА ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

С. Н. Мелихов (Ростов-на-Дону, Владикавказ РФ)
melih@math.rsu.ru
Л. В. Стефаненко (Ростов-на-Дону РФ)
stefanenko.lv@mail.ru

В середине 50-х годов прошлого века Л. Шварц поставил проблему существования линейного непрерывного правого обратного (ЛНПО) к дифференциальному оператору в частных производных конечного порядка с постоянными коэффициентами в пространствах бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(\Omega)$ и распределений $D'(\Omega)$ на открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Для выпуклых областей Ω она была решена в работе Р. Майзе, Б.А. Тейлора, Д. Фогта [1].

С начала 60-х годов прошлого века аналогичная проблема решалась для операторов свертки (в частности, дифференциальных операторов бесконечного порядка с постоянными коэффициентами) в пространствах всех (ростков) функций, аналитических на множествах Q в $\mathbb{C}^N$. К настоящему времени эта задача решена для выпуклых областей Q и компактов Q [4, 5] в $\mathbb{C}^N$ и, более общим образом, для выпуклых локально замкнутых множеств $Q \subseteq \mathbb{C}^N$ [6].

В докладе речь идет о существовании ЛНПО к задаваемому некоторым аналитическим функционалом μ сюрьективному оператору свертки T_μ, действующему в пространствах ростков всех функций, аналитических на выпуклых подмножествах $Q \subseteq \mathbb{C}$ с непустой внутренностью, обладающих счетным базисом окрестностей из выпуклых областей. В случае, когда носителем функционала μ является точка и Q ограничено, указанная проблема решена в [7].

Далее Q — собственное выпуклое подмножество $\mathbb{C}$ с непустой внутренностью, обладающее базисом окрестностей, состоящим из выпуклых областей Q_n таких, что $Q_{n+1} \subseteq Q_n$, $n \in \mathbb{N}$. Для существования такого базиса необходимо и достаточно, чтобы множество $\omega := Q \cap (\partial Q)$ было компактно и любая опорная прямая к $\overline{Q}$ — замыканию Q — не пересекала одновременно множество ω и $(\partial Q) \setminus \omega$. При этом символ ∂Q обозначает границу Q. Пусть $A(Q_n)$ — пространство Фреше всех аналитических в Q_n