Отсюда справедливость леммы для $\zeta(y) \in \overset{0}{W}{}_n^1 \ (D^*)$ следует из [3, гл. V, замечание 2.1].

Для квазиконформных в среднем экстремальных отображений см. [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елизарова М. А., Малютина А. Н.* Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства. LAMBERT Acad. Publ., 2013. 121 с.

2. *Alipova K. A., Elizarova M. A., Malyutina A. N.* Examples of the mappings with s-averaged characteristic // Комплексный анализ и его приложения : материалыVII Петрозаводск. междунар. конф. (29июня –5 июля 2014 г.) /под ред. проф. В. В. Старкова; ПетрГУ. Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2014. С. 12–17.

3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1975.

4. *Стругов Ю. Ф.* Вариации пространственных квазиконформных отображений и экстремальные отображения // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1976. Вып. 25. С. 154–157.

УДК 517.54

О ПРОДОЛЖЕНИИ ОТОБРАЖЕНИЙ С (s, α)-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А. Н. Малютина, Б. В. Соколов (Томск, РФ)

nmd@math.tsu.ru, sokolov@ido.tsu.ru

Для отображений с (s, α)-усредненной характеристикой доказывается теорема о продолжении на границу шара.

Пусть $R^n (n \geq 3)$ — евклидово n-мерное пространство, $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$, B^n — шар $|x| < 1$. Если $D \subset R^n$ — область, то через ∂D и $\bar{D}$ обозначим соответственно границу и замыкание области D в R^n.

Определение 1. Будем говорить, что *отображение* $f \colon D \to R^n$ *принадлежит классу* $f \in Q_K^{s,\alpha}(D)$, если

1) $f \in W_{n,loc}^1(D)$ — непрерывное, открытое, изолированное отображение, якобиан отображения $J(x, f) > 0$ почти всюду в D;

2) существует постоянная $K > 0$ такая, что при фиксированных s, α, $\frac{1}{n-1} < s < \infty$, $\alpha \in R$, интеграл

$$I_{s,\alpha}(f, D) = \left(\int\limits_D \lambda^s(x, f) r^\alpha(x, \partial D) \frac{dx}{(1 + |x|^2)^n} \right)^{1/s} \leq K,$$

где $\lambda(x, f) = \dfrac{|\nabla f|^n}{J(x, f)}$, $r(x, \partial D)$ — евклидово расстояние от точки x до границы ∂D области D.

Назовем отображение $f\colon D\to R^n$ отображением с (s,α)-усредненной характеристикой ($f\in Q^{s,\alpha}(D)$), если $f\in Q^{s,\alpha}_K(D)$ при каком-либо конечном $K>1$. Известно [1], что $Q^{s,\alpha}\not\subset BL^{p,\alpha}$ при $p<n$, $s<\frac{p}{n-p}$.

Определение 2. Функцию $k(t)\colon (0,+\infty)\to[0,+\infty)$ будем называть*ядром*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $k(t)$ непрерывна, не возрастает и $\lim\limits_{t\to 0+}k(t)=\infty$;

2) $\int\limits_0 k(t)t^{n-1}\,dt<\infty$.

Определение 3. Будем говорить, что *отображение $f\colon D\to R^n$ принадлежит классу $f\in Q^{s,\alpha}_K(k,D)$*, если существует постоянная $K>1$ такая, что при фиксированных s, α, $1<s<\infty$, $\alpha\in R$, интеграл

$$I_{s,\alpha}(f,k,D)=\left(\int\limits_D \lambda^s(x,f)r^\alpha(x,\partial D)k(|x-y|)\frac{dx}{(1+|x|^2)^n}\right)^{1/s}\le K$$

для всех $y\in\bar D$, где ядро $k(t)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0 (k(t))^{\frac{1}{s+1}}\,t^{\frac{n}{s+1}+\bar\alpha-1}\,dt=+\infty,\bar\alpha=\begin{cases}\alpha,\alpha\ge 0\\ 0,\alpha<0\end{cases}.$$

Будем говорить, что *отображение $f\colon D\to R^n$ принадлежит классу* $f\in Q^{s,\alpha}(k,D)$, если $f\in Q^{s,\alpha}_K(k,D)$ при каком-либо конечном K.

Различные соотношения между классами $f\in Q^{s,\alpha}_K(k,D)$ и классами отображений с ограниченными интегралами Дирихле и с ограниченным потенциалом градиента см. в [1].

Мы опираемся на следующее утверждение, представляющее собой модификацию хорошо известного неравенства [2].

Теорема 1. *Пусть $f\in Q^{s,\alpha}(k,B^n)$, $s>(n-1)\left(1+\frac{\bar\alpha}{\gamma}\right)$, $0<\gamma<1$, и пусть S_r — семейство концентрических сфер с центром в точке $x_0\in$ $\in B^n$ и радиуса r, $0\le r_1\le r\le r_2<\frac12$. Тогда выполняется неравенство*

$$\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\left(\frac{\omega^{ns}(f,S'_r)k(r)}{r^{s+1-n+\bar\alpha}}\right)^{\frac{1}{s+1}}dr\right)^{s+1}\le$$

$$\le C\int\limits_{B^n_{r_2}(x_0)}\lambda^s(x,f)r^\alpha(x,\partial B^n)k(|x-x_0|)\,d\sigma_x,$$

где $\omega(f,S'_r)$ – колебание отображения f на множестве $S'_r=S_r\cap B^n$, C — постоянная, не зависящая от f.

Доказательство. Используя лемму 2 [3] и включение $Q^{p/(n-p)} \subset$ $\subset BL^p$, $p < n$ [6], будем иметь

$$I = \int\limits_{r_1}^{r_2} \omega^{\frac{ns}{s+1}}(f, S_r) r^q k^{\frac{1}{s+1}}(r)\, dr \leq$$

$$\leq C \int\limits_{B^n_{r_2}(x_0)} \lambda^{\frac{s}{s+1}}(x, f) r^{\alpha}(x, \partial B^n) k^{\frac{1}{s+1}}(|x - x_0|) J^{\frac{s}{s+1}}(x, f)\, d\sigma_x,$$

где $q = 1 + \bar{\alpha} - n/(s+1)$, C — постоянная, не зависящая от f.

Применяя к интегралу, стоящему в правой части этого неравенства, неравенство Гельдера с показателями $p = s + 1$, $q = \frac{s+1}{s}$, получим $I \leq$ $\leq CV^k_{r_2}(f, x_0)$, где

$$V^k_{r_2}(f, x_0) = \int\limits_{B^n_{r_2}(x_0)} \lambda^s(x, f) r^{\alpha}(x, \partial B^n) k(|x - x_0|)\, d\sigma_x.$$

Следствие 1. *В условиях и обозначениях теоремы 1 для любого $\varepsilon > 0$ существует $\bar{r} \in [r_1, r_2]$ такое, что*

$$\omega^{\frac{ns}{s+1}}(f, S'_{\bar{r}}) \int\limits_{r_1}^{r_2} k^{\frac{1}{s+1}}(r) r^q\, dr \leq (C + \varepsilon) V^k_{r_2}(f, x_0),$$

где $q = 1 - \frac{n}{s+1} + \bar{\alpha}$.

Следующая теорема обобщает аналогичные результаты для квазиконформных отображений [4, 17.13] и для отображений класса $L^1_n(D)$ [5].

Теорема 2. *Пусть ядро $k(t)$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0 k(t) t^{n+\alpha-s-1} dt = \infty, \tag{1}$$

$s > (n-1)(1+\alpha)$, $\alpha \geq 0$. Если f — гомеоморфное отображение класса $Q^{s,\alpha}(k, B^n)$ шара B^n на область $D \subset R^n$, локально связную в каждой точке предельного множества $C(f, b)$, $b \in \partial B^n$, то существует $\lim\limits_{x \to b} f(x)$.

Доказательство. Предположим, наоборот, что область D локально связна в двух различных точках $b_1, b_2 \in C(f, b)$. Выберем шаровые окрестности U_1, U_2 точек b_1 и b_2 соответственно такие, что $r(U_1, U_2) =$ $= d > 0$.

По определению предельного множества $C(f, b)$ существуют последовательности точек $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ такие, что $x_i, y_i \in B^n$, $x_i \to b_1$, $y_i \to b_2$ и $f(x_i) \to b_1$, $f(y_i) \to b_2$. В силу локальной связности области D в точке $b_1 \in C(f, b)$ найдется окрестность U_1', $U_1' \subset U_1$ точки b_1 такая, что любые две точки из U_1' можно соединить связным множеством $\gamma \subset U_1$. Зафиксируем некоторую точку $x_0' \in U_1'$. Тогда для достаточно больших номеров k точки $x_0', f(x_k)$ можно соединить связным множеством γ_k', целиком лежащим в U_1'. Аналогично, для точки $b_2 \in C(f, b)$ найдется связное множество γ_k'', $\gamma_k'' \subset U_2'$. Тогда будем иметь, что

$$r(\gamma_k', \gamma_k'') \geq d > 0. \tag{2}$$

Рассмотрим семейство концентрических сфер $\{S_r\}$ с центром в точке $b \in \partial B^n$ и радиуса r, $\sup(|x_k - b|, |y_k - b|) = r_1 \leq r \leq r_2 = \sup(|x_0 - b|, |y_0 - b|)$, где $x_0 = f^{-1}(x_0')$, $y_0 = f^{-1}(y_0')$. Легко видеть, что для любого $r \in$ $\in [r_1, r_2]$ множество $S_r' = S_r \cap B^n$ пересекает связные множества $f^{-1}(\gamma_k')$, $f^{-1}(\gamma_k'')$. Отсюда, в силу условия (2) будем иметь, что $\omega(f, S_r') \geq d > 0$, а учитывая (1) получаем, что

$$\int_0^{r_2} \frac{\omega^s(f, S_r)k(r)}{r^{s+1-n+\bar{\alpha}}} dr \geq d \int_0^{r_2} k(r) r^{n+\alpha-s-1} dr = \infty.$$

С другой стороны, применяя следствие 1, будем иметь что

$$\int_0^{r_2} \frac{\omega^s(f, S_r')k(r)}{r^{s+1-n+\bar{\alpha}}} dr \leq C \int\limits_{B^n_{r_2}(b)} \lambda^s(x, f) r^{\alpha}(x, \partial B^n) k(|x - x_0|)\, dx < \infty.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие 2. *Если в условиях и обозначениях теоремы 2 f — гомеоморфное отображение класса $Q^{s,\alpha}(k, B^n)$ шара B^n на область $D \subset R^n$, локально связную на границе, тогда существует непрерывное продолжение $\bar{f}\colon \bar{B}^n \to \bar{D}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малютина А. Н.* Классы отображений с ограниченным в среднем искажением // Вестн. Том. гос. ун-та. 2000. № 269. С. 51–55.

2. *Овчинников И. С., Суворов Г. Д.* Преобразования интеграла Дирихле и пространственные отображения // Сиб. матем. журн. 1965. Т. 6, № 6. С. 1292–1314.

3. *Куфарев Б. П., Соколов Б. В.* О граничном соответствии при отображениях областей из R^n // ДАН СССР. 1978. Т. 243, № 3. С. 568–571.

4. *Vaisala J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Lect. Notes in Math. Vol. 229. Berlin : Springer-Verlag, 1971.

5. *Овчинников И. С.* Простые концы пространственных областей // Тр. Том. ун-та. 1966. Т. 189. С. 96–104.

6. *Малютина А. Н., Елизарова М. А.* О связи классов отображений с s-усредненной характеристикой с некоторыми классами пространственных отображений // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2010. № 4 (12). С. 18–31.

УДК 517.956.223

БИГАРМОНИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ ФУНКЦИИ

А. Н. Марковский (Краснодар, РФ)
mark@kubsu.ru

Доказывается полнота сдвигов фундаментальных решений бигармонического уравнения; приводится обобщение утверждения П. С. Новикова о разложении пространства $L_2(Q)$ в прямую сумму гармонического, бигармонического и новиковского подпространств. Предложен алгоритм задачи выделения бигармонической составляющей.

1. Рассмотрим однородное бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u(x) = 0,\ \Delta^2 = \Delta(\Delta)$$

в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей Ляпунова $S = \partial Q$, $S \in C^{1+\alpha}$,$(\alpha > 0)$, где Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$, представляющим собой декартовы координаты точек $(x_1, x_2, ..., x_n)$ евклидова n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, $(n \geqslant 2)$.

Известно [1, 2], что фундаментальные решения бигармонического уравнения имеют вид:

а) в случае нечетных $n > 1$ и четных n, для которых $n > 4$,

$$E_{2,n}(x) = d_{2,n} \left|x\right|^{4-n}, \quad d_{2,n} = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{8(4-n)(2-n)}; \tag{1}$$

б) в случае четных n, $n \leqslant 4$,

$$E_{2,n}(x) = d_{2,n} \left|x\right|^{4-n} \ln\left|x\right|,\ d_{2,n} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} - 1}{8\Gamma(3 - \frac{n}{2})(\pi)^{n/2}}. \tag{2}$$

2. Обозначим $G(Q)$ — подпространство гармонических в Q функций из $L_2(Q)$. Ниже приводится лемма П. С. Новикова разложения пространства $L_2(Q)$, данная в статье [3] для трехмерного случая. Общий случай $(n \geqslant 2)$ приводится в работах [4, 5].