$$= f(t_j) - ay_1 - b(y_0 + y_1 t_j), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Неизвестные коэффициенты $\hat{y}_k$ данной системы можно найти, к примеру, с помощью метода наименьших квадратов.

Заметим, что данный метод численного решения задачи Коши практически без изменений переносится на линейные дифференциальные уравнения любого порядка с переменными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.*Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам // Дагестанский электрон. матем. изв. 2015. Вып. 3. С.1–257. URL: http://mathreports.ru/static?id=87 (дата обращения 12.12.2015).

2.*Шарапудинов И. И., Муратова Г. Н.* Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 68–76.

УДК 517.518.26

ВАРИАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕГОМЕОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С S-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А. Н. Малютина, К. А. Алипова (Томск, РФ)

nmd@math.tsu.ru, ksusha_ast@mail.ru

Пусть D, D^* — области в R^n, и отображение $f\colon D \to D^*$ — открытое, непрерывное, изолированное, $f \in W^1_{n,loc(D)}$ и $J(x,f)$ сохраняет знак почти всюду в D (для определенности возьмем $J(x,f) > 0$), тогда будем говорить $f \in \hat{W}^1_{n,loc(D)}$.

Введем следующие обозначения:

$K_I(x,f) = \dfrac{J(x,f)}{l^n(x,f)}$ — внутренняя дилатация отображения f, где $l(x,f) = \min\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$; $K_O(x,f) = \dfrac{L^n(x,f)}{J(x,f)}$ — внешняя дилатация отображения f, где $L(x,f) = \max\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$; $K(x,f) = \dfrac{|f'(x)|}{l(x,f)}$, $\lambda(x,f) = n^{-n/2}\dfrac{|\nabla f(x)|^n}{|J(x,f)|}$.

$W^k_m(D)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $L_m(D)$, имеющих обобщенные производные всех видов до порядка k включительно, суммируемые по D со степенью m.

$\overset{0}{W}{}^k_m(D)$ — подпространство пространства $W^k_m(D)$, плотным множеством в котором является совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций с носителями в D.

Определение 1 [1]. Отображение f называется *отображением с $K_{I,s}$-усредненной характеристикой*, если:

1) $f \in \hat{W}^1_{n,loc(D)}$;

2) существует постоянная $K_{I,s} \geq 0$ такая, что выполняется неравенство

$$K_{I,s}(f) = \left(\int\limits_D K_I^s(x,f)\, d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K_{I,s},$$

где $d\sigma_x = \dfrac{dx}{(1+|x|^2)^n}$.

Определение 2. Отображение f называется *отображением с $K^*_{O,s}$-усредненной характеристикой*, если:

1) $f \in \hat{W}^1_{n,loc(D)}$;

2) существует постоянная $K^*_{O,s} \geq 0$ такая, что выполняется неравенство

$$K^*_{O,s}(f) = \left(\int\limits_D K_O^s(x,f) J(x,f)\, d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K^*_{O,s},$$

где $d\sigma_x = \dfrac{dx}{(1+|x|^2)^n}$.

Определение 3 [1, 2]. Отображение f будем называть *отображением с $(K^*_{O,s}, K_{I,s})$-усредненной характеристикой* или *отображением с s-усредненной характеристикой.*

Определение 4. Пусть $f^{-1}(y) = \{x_i\}$, $f^{-1}(y_j) = \{x_j^k\}$ и $V_i = U(x_i, f, r)$ — непересекающиеся нормальные окрестности точек x_i [MRV]. В каждой окрестности V_i находится $m_i = i(x_i, f)$ точек из множества $\{x_j^k\}$. Существуют окрестности $V_i = U(x_i, f, r)$ точек x_i такие, что $f|_{V_i}$ — гомеоморфизм. Поэтому можно рассмотреть отображения $f_i \colon B^n(y,r) \to V$, f_i — ветви отображения f, причем $f \circ f_i$ — тождественное отображение. Отображения f_i тоже абсолютно непрерывны в смысле Тонелли в сферической метрике.

$$\int\limits_{D^*} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}\, d\sigma_y = \int\limits_{D^* \setminus f(B_f)} \left(\frac{1}{m} \sum_i \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \right|^n \right) d\sigma_y \leq$$

$$\leq \frac{n^{\frac{n}{2}}}{m} \sum_i \int\limits_{D^*} \parallel Jf_i \parallel^n\, d\sigma_y \leq k \frac{n^{\frac{n}{2}}}{m} \int\limits_{D^*} (Jf_i)\, d\sigma_y \leq Ck \frac{n^{\frac{n}{2}}}{m} |D|,$$

где $C = C(n, D)$. Следовательно, $f_i \in ACL_n(D^*)$.

Определение 5. Пусть $f\colon D \to D^*$, $g\colon D \to D^*$ — отображения с s-усредненной характеристикой. Мы будем называть f *экстремальным отображением*, если для любого g, совпадающего с f на границе области D, выполняется $K_{I,s}(f) \le K_{I,s}(g)$.

Определение 6. Функция $\eta(x) = \big(\eta^1(x), ..., \eta^n(x)\big) \in \overset{0}{W}{}_n^1(D)$ называется *допустимой вариацией отображения с s-усредненной характеристикой* f, если для всех $t \in [-1, 1]$ отображение $f(x) + t\eta(x)$ является отображением с s-усредненной характеристикой.

Лемма 1. *Пусть $f(x)$ — произвольное отображение с s-усредненной характеристикой. Тогда класс его допустимых вариаций не пуст.*

Доказательство. Нетрудно показать, что функция $\eta(x) = (0, ..., 0, -\varepsilon\zeta\,(f(x)))$ является допустимой вариацией отображения $f(x)$ при $0 < \varepsilon < \min\left\{1, \left(\max\limits_{D^*}|\zeta|\right)^{-1}\right\}$, где $\zeta(y)$ — гладкая вещественная функция с носителем в D^*.

Обозначим

$$F(A) = n^{-n/2}|A|^{sn}|detA|^{-s},$$

где $a_j^i = \dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}$ и $|A| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_j^i)^2\right)^{1/2}$, $F_j^i(A_f) = \dfrac{\partial F}{\partial a_j^i}(A_f)$.

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ — экстремальное отображение с s-усредненной характеристикой. Тогда*

$$\int\limits_D \sum_{i,j=1}^{n} F_j^i(A_f)\frac{\partial \eta^i}{\partial x_j}\,d\sigma_x = 0,$$

где $\eta(x) = \zeta(f(x))$, $\zeta(y) \in \overset{0}{W}{}_n^1(D^*)$.

Доказательство. Если $\zeta(y) \in C_0^1(D^*)$, то можно показать, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$\left|F_j^i(A_{f+\varepsilon t\eta})\frac{\partial \eta^i}{\partial x_j}\right| \le M < \infty$$

для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и для всех $t \in [-1, 1]$.

Поэтому

$$0 = \int\limits_D \sum_{i,j=1}^{n} F_j^i(A_f)\frac{\partial \eta^i}{\partial x_j}\,d\sigma_x = \int\limits_{D^*} \sum_{i,j=1}^{n} G_k^i\frac{\partial \zeta^i}{\partial y}\,d\sigma_y,$$

где $G_k^i(y) = |J(y, f^{-1})|\sum\limits_{j=1}^{n} F_j^i(A_f)\frac{\partial f^k}{\partial x_j}$.

Отсюда справедливость леммы для $\zeta(y) \in \overset{0}{W}{}_n^1\ (D^*)$ следует из [3, гл. V, замечание 2.1].

Для квазиконформных в среднем экстремальных отображений см. [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елизарова М. А., Малютина А. Н.* Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства. LAMBERT Acad. Publ., 2013. 121 с.

2. *Alipova K. A., Elizarova M. A., Malyutina A. N.* Examples of the mappings with s-averaged characteristic // Комплексный анализ и его приложения : материалыVII Петрозаводск. междунар. конф. (29июня –5 июля 2014 г.) /под ред. проф. В. В. Старкова; ПетрГУ. Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2014. С. 12–17.

3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1975.

4. *Стругов Ю. Ф.* Вариации пространственных квазиконформных отображений и экстремальные отображения // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1976. Вып. 25. С. 154–157.

УДК 517.54

О ПРОДОЛЖЕНИИ ОТОБРАЖЕНИЙ С (s, α)-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А. Н. Малютина, Б. В. Соколов (Томск, РФ)

nmd@math.tsu.ru, sokolov@ido.tsu.ru

Для отображений с (s, α)-усредненной характеристикой доказывается теорема о продолжении на границу шара.

Пусть $R^n (n \geq 3)$ — евклидово n-мерное пространство, $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$, B^n — шар $|x| < 1$. Если $D \subset R^n$ — область, то через ∂D и $\bar{D}$ обозначим соответственно границу и замыкание области D в R^n.

Определение 1. Будем говорить, что *отображение* $f\colon D \to R^n$ *принадлежит классу* $f \in Q_K^{s,\alpha}(D)$, если

1) $f \in W_{n,loc}^1(D)$ — непрерывное, открытое, изолированное отображение, якобиан отображения $J(x, f) > 0$ почти всюду в D;

2) существует постоянная $K > 0$ такая, что при фиксированных s, α, $\frac{1}{n-1} < s < \infty$, $\alpha \in R$, интеграл

$$I_{s,\alpha}(f, D) = \left(\int\limits_D \lambda^s(x, f) r^\alpha(x, \partial D) \frac{dx}{(1 + |x|^2)^n} \right)^{1/s} \leq K,$$

где $\lambda(x, f) = \dfrac{|\nabla f|^n}{J(x, f)}$, $r(x, \partial D)$ — евклидово расстояние от точки x до границы ∂D области D.