УДК 517.521

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СМЕШАННЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

М. Г. Магомед-Касумов (Махачкала, РФ)
rasuldev@gmail.com

В данной работе предложен метод численного решения задачи Коши, основанный на разложении самой функции и ее производных в смешанный ряд по функциям Хаара.

Рассмотрим его применение на примере задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad t \in [0,1], \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \quad (1)$$

Смешанные ряды по различным ортогональным системам были введены и исследованы в работах И. И. Шарапудинова (см., например, [1]). В данной работе нам понадобятся смешанные ряды по системе Хаара $\{\chi_k(x)\}$ [2]. Для $r \in \mathbb{N}$ определим систему функций $\{\chi_{r,k}\}_{k=1}^{\infty}$ [1]:

$$\chi_{r,k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \quad 1 \le k \le r, \quad (2)$$

$$\chi_{r,r+k}(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^t (t-x)^{r-1} \chi_k(x)\, dx, \quad t \in [0,1], \quad k = 1, 2, \ldots. \quad (3)$$

Поскольку для простоты изложения мы ограничились лишь дифференциальными уравнениями второго порядка, то в дальнейшем будут встречаться функции (2) только для $r = 1$ и $r = 2$.

Пусть функция $y(t)$ имеет на $[0,1]$ абсолютно непрерывную первую производную. Применяя формулу Тейлора с остатком в интегральной форме, мы можем записать следующие равенства:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + \int_0^t (t-x) y''(x)\, dx, \quad (4)$$

$$y'(t) = y'(0) + \int_0^t y''(x)\, dx. \quad (5)$$

В силу того, что $y''(t) \in L^1(0,1)$, ряд Фурье – Хаара $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{y}_k \chi_k(t)$ для этой функции будет сходиться к самой функции в метрике пространства $L^1(0,1)$. В таком случае $y''(t)$ можно приближенно заменить частичной суммой

$$y''(t) \approx S_n(y'',t) = \sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k \chi_k(t). \tag{6}$$

Подставляя сумму (6) в (4) и учитывая начальные условия (1), получим следующее приближенное представление функции $y(t)$:

$$y(t) \approx y_0 + y_1 t + \int\limits_0^t (t-x) \sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k \chi_k(t) dx =$$

$$= y_0 + y_1 t + \sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k \int\limits_0^t (t-x)\chi_k(t) dx = y_0 + y_1 t + \sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k \chi_{2,k+2}(t). \tag{7}$$

Поступая аналогичным образом, для $y'(t)$ получим:

$$y'(t) \approx y_1 + \sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k \chi_{1,k+1}(t). \tag{8}$$

Выражения (7) и (8) называются частичными суммами смешанных рядов по системе Хаара $\{\chi_k\}$ [2].

Вернемся теперь к задаче Коши (1). С помощью разложения в ряд Фурье – Хаара мы приближенно представили неизвестную функцию $y''(t)$ в виде конечной суммы (6), в которой фигурируют неизвестные коэффициенты $\hat{y}_k$. Основная идея при применении смешанных рядов заключается в том, что удается выразить все производные меньших порядков (в данном случае $y'(t)$, $y(t)$) через конечные суммы с теми же самыми неизвестными коэффициентами $\hat{y}_k$ (см. (7), (8)). Таким образом, подставляя найденные выражения (6), (7) и (8) в (1), получаем уравнение относительно неизвестных $\hat{y}_k$, $k = 1, \dots, n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k (\chi_k(t) + a\chi_{1,k+1}(t) + b\chi_{2,k+2}(t)) = f(t) - ay_1 - b(y_0 + y_1 t), \tag{9}$$

решение которого можно получить, например, следующим образом. Фиксируем на отрезке $[0,1]$ узлы $t_1, \dots, t_m$. Рассматривая уравнение (9) относительного каждого узла t_j, получим систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k (\chi_k(t_j) + a\chi_{1,k+1}(t_j) + b\chi_{2,k+2}(t_j)) =$$

$$= f(t_j) - ay_1 - b(y_0 + y_1 t_j), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Неизвестные коэффициенты $\hat{y}_k$ данной системы можно найти, к примеру, с помощью метода наименьших квадратов.

Заметим, что данный метод численного решения задачи Коши практически без изменений переносится на линейные дифференциальные уравнения любого порядка с переменными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.*Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам // Дагестанский электрон. матем. изв. 2015. Вып. 3. С.1–257. URL: http://mathreports.ru/static?id=87 (дата обращения 12.12.2015).

2.*Шарапудинов И. И., Муратова Г. Н.* Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 68–76.

УДК 517.518.26

ВАРИАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕГОМЕОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С S-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А. Н. Малютина, К. А. Алипова (Томск, РФ)

nmd@math.tsu.ru, ksusha_ast@mail.ru

Пусть D, D^* — области в R^n, и отображение $f\colon D \to D^*$ — открытое, непрерывное, изолированное, $f \in W^1_{n,loc(D)}$ и $J(x,f)$ сохраняет знак почти всюду в D (для определенности возьмем $J(x,f) > 0$), тогда будем говорить $f \in \hat{W}^1_{n,loc(D)}$.

Введем следующие обозначения:

$K_I(x,f) = \dfrac{J(x,f)}{l^n(x,f)}$ — внутренняя дилатация отображения f, где $l(x,f) = \min\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$; $K_O(x,f) = \dfrac{L^n(x,f)}{J(x,f)}$ — внешняя дилатация отображения f, где $L(x,f) = \max\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$; $K(x,f) = \dfrac{|f'(x)|}{l(x,f)}$, $\lambda(x,f) = n^{-n/2}\dfrac{|\nabla f(x)|^n}{|J(x,f)|}$.

$W^k_m(D)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $L_m(D)$, имеющих обобщенные производные всех видов до порядка k включительно, суммируемые по D со степенью m.

$\overset{0}{W}{}^k_m(D)$ — подпространство пространства $W^k_m(D)$, плотным множеством в котором является совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций с носителями в D.