УДК 517.5

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МАСШТАБИРУЮЩИХ ФУНКЦИЯХ ПО НЕРАВНОМЕРНОЙ СИСТЕМЕ СДВИГОВ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА[1]

С. Ф. Лукомский (Саратов, РФ)
LukomskiiSF@info.sgu.ru

В работе [1] при построении классического КМА в качестве множества сдвигов предлагалось использовать не множество целых чисел $\mathbb{Z}$, а множество $2\mathbb{Z} + \left\{0, \frac{r}{p}\right\}$, где $0 < r \le 2p-1$ и r, p —взаимно простые. В работе [2] этот вопрос рассмотрен на локальном поле K положительной характеристики. Если в качестве поля K выбрать p-ичную группу Виленкина G с базисной последовательностью $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, то в работе [2] в качестве множества сдвигов предлагается выбрать множество $H_0 \dot{+} \left\{0, \frac{r}{p}\right\}$, где

$$H_0 = \{a_{-1}g_{-1} + a_{-2}g_{-2} + \dots + a_{-s}g_{-s} : \ a_{-j} = \overline{0, p-1}\}, \ 1 \le r \le 2p-1.$$

В работе [2] получены достаточные условия на функцию φ, при которых φ порождает ортогональный КМА. Примеров построения функции φ нет. Более того, можно доказать, что в случае $p = 2$ не существует ступенчатой масштабирующей функции, порождающей ортогональный КМА относительно системы сдвигов $H_0 \dot{+} \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. В докладе мы выбираем в качестве системы сдвигов множество

$$H = \{\dot{-}a_{-1}g_0 \dot{+} a_{-1}g_{-1} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-s}g_{-s} : \ s \in \mathbb{N}\}.$$

В этом случае справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in L_2(G)$ такова, что $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}_{-N}(G_M^\perp)$, т.е. $\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset G_M^\perp$ и преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\chi)$ постоянно на смежных классах $G_{-N}^\perp\chi$ и пусть r_n — функции Радемахера. Система сдвигов $\varphi(x \dot{-} h)_{h\in H}$ будет ортонормированной системой тогда и только тогда, когда для любых $\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1} = \overline{0, p-1}$*

$$\sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{M_1} = 0} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{-2}^{\alpha_{-2}} r_{-1}^{\alpha_{-1}+\alpha_0}, r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = 1.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

Если $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}_{-N}(G_M^{\perp})$ и φ является масштабирующей функцией, то $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})$, где $\mathcal{A}$ – оператор растяжения. Маска $m_0(\chi)$ имеет вид

$$m_0(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)} \cdot (\chi\mathcal{A}^{-1}, a_{-1}g_0),$$

где $H_0^{(N)} = \{a_{-1}g_{-1} + a_{-2}g_{-2} + \cdots + a_{-N}g_{-N} : \ a_{-j} = \overline{0, p-1}\}$.

Теорема 2. 1. *Маска $m_0(\chi)$ периодична с любым периодом $r_{-2}^{\alpha_{-2}}$ $r_{-3}^{\alpha_{-3}} \ldots r_{-s}^{\alpha_{-s}}$.*

2. *Маска m_0 определяется своими значениями на подгруппе $G_1^{\perp}$. Более того, при каждом $\gamma_0 \in \{0, ..., p-1\}$ значения маски m_0 совпадают на смежных классах $(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots \ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} r_1^{\alpha_1})$, для которых $\alpha_1 \dot{-} \alpha_0 = \gamma_0$.*

Рассмотрим **пример**. Пусть $p = 3$, $M = N = 1$. Определим значения маски на смежных классах $G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0}$ равенствами $m_0(G_{-1}^{\perp}) = 1$, $|m_0(G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0})| = 1$ при $(\alpha_{-1}, \alpha_0) = (2, 0)$, $(\alpha_{-1}, \alpha_0) = (0, 2)$, $m_0(G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0}) = 0$ в остальных случаях. Продолжим m_0 на подгруппу $G_2^{\perp}$ так, чтобы было выполнено 2-е условие теоремы 2. После этого продолжим ее периодически на всю группу X.

Для такой маски

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi\mathcal{A}^{-k}) = \begin{cases} 0, & \chi \in G_2^{\perp} \setminus G_1^{\perp} \\ m_0(\chi\mathcal{A}^{-1}) m_0(\chi), & \chi \in G_1^{\perp} \end{cases},$$

и функция $\hat{\varphi}(\chi)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Поэтому сдвиги $\varphi(\chi \dot{-} h)_{h \in H}$ образует ортонормированную систему в G. Общие методы КМА позволяют доказать, что $\varphi(\chi)$ порождает ортогональный КМА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *J.-P. Gabardo and M. Nashed* Nonuniform multiresolution analyses and spectral pairs// J. Funct. Anal. 1998. Vol. 158. P. 209–241.

2. *F. A. Shah and Abdullah* Nonuniform multiresolution analysis on local fields of positive characteristic// Complex Anal. Oper. Theory. 2015. Vol. 9, iss. 7. P. 1589–1608.