УДК 517.5

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ ХААРА К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА[1]

Д. С. Лукомский, П. А. Терехин (Саратов, РФ)

lukomskiids@info.sgu.ru, terekhinpa@info.sgu.ru

Идея применения системы Хаара для численного решения дифференциальных уравнений (задачи Коши, краевых задач и т.д.) не нова и рассматривалась, например, в работах [1] и [2]. Однако, в этих работах по функциям Хаара раскладывалось само решение, в связи с этим возникала необходимость в применении специального разностного оператора дифференцирования для разрывных функций. Иной подход был предложен в статье [3], когда в ряд разлагалась вторая производная решения дифференциального уравнения второго порядка, а само решение было представлено в виде кусочно-постоянных сплайнов второй степени. Данный подход получил развитие в работе [4], где были получены оценки погрешности приближения данного решения.

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x), \qquad 0 \le x \le 1, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Предполагаем, что $a(x), b(x) \in C[0,1]$ - непрерывные функции.

Будем искать приближенное решение $y_n(x)$ задачи (1), представляя его производную в виде полинома по системе Хаара $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ порядка не выше 2^n:

$$y_n'(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{y}_{n,k}\chi_k(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} y_{n,k}\chi_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n})}.$$

Восстановим функцию $y_n(x)$ по ее производной:

$$y_n(x) = y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k}(x - k2^{-n}), \qquad k2^{-n} \le x \le (k+1)2^{-n},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (первый автор, проект № 13-01-00102) и в рамках выполнения проектной части госзадания Минобрнауки РФ (второй автор, проект № 1.1520.2014K).

где $k = 0, \ldots, 2^n - 1$. Функция $y_n(x)$ является кусочно-линейной с узлами в двоично-рациональных точках $k2^{-n}$. Фиксируем набор промежуточных точек $x_{n,k} = (k + \theta_{n,k})2^{-n}$, $0 < \theta_{n,k} < 1$, $k = 0, \ldots, 2^n - 1$. Потребуем, чтобы функция $y_n(x)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению (1) на множестве точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$. Получим систему уравнений

$$y_n'(x_{n,k}) + a(x_{n,k})y_n(x_{n,k}) = b(x_{n,k}), \qquad k = 0, \ldots, 2^n - 1.$$

С учетом представления функций $y_n(x)$ и $y_n'(x)$ и обозначив для краткости $a_{n,k} = a(x_{n,k})$ и $b_{n,k} = b(x_{n,k})$ будем иметь

$$y_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k}\theta_{n,k}2^{-n}\right) = b_{n,k}, \quad k = 0, \ldots, 2^n - 1. \tag{2}$$

Упростим рекуррентные соотношения (2) путем приведения их к следующему виду

$$z_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j}\right) = b_{n,k}, \qquad k = 0, \ldots, 2^n - 1. \tag{3}$$

Из уравнений (3) величины $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ определяются рекуррентно и однозначно для любого натурального числа n.

Пусть функции $z_n(x)$ и $z_n'(x)$ имеют тот же смысл, что и пара $y_n(x)$ и $y_n'(x)$, т.е. в представлении последних величины $y_{n,k}$ заменены на $z_{n,k}$.

Функцию $z_n(x)$ нетрудно определить из рекуррентных соотношений (3) по входным интерполяционным и начальным данным: $\{a_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$, $\{b_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ и y_0.

Введем следующие характеристики задачи (1):

$$C = |y_0|\,\|a\| + \|b\|, \quad \Omega_n = |y_0|\omega(a, \tfrac{1}{2^n}) + \omega(b, \tfrac{1}{2^n}), \quad \Omega_n^* = \omega(a, \tfrac{1}{2^n}) + \tfrac{\|a\|}{2^n},$$

где $\|f\| = \sup\limits_{0\le x\le 1} |f(x)|$ и $\omega(f,\delta) = \sup_{|x_1-x_2|\le\delta} |f(x_1) - f(x_2)|$ — равномерный модуль непрерывности, а также характеристики приближенных решений

$$Y_n = \max_{0\le k<2^n} |y_{n,k}|, \quad Z_n = \max_{0\le k<2^n} |z_{n,k}|, \quad \Delta_n = \max_{0\le k<2^n} |y_{n,k} - z_{n,k}|.$$

Лемма. *Справедливы неравенства*

$$Z_n \le Ce^{\|a\|}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\Delta_n \leq \frac{2C\|a\|e^{3\|a\|}}{2^n}, \qquad n \geq \log_2 \|a\| + 1.$$

Из леммы вытекает равномерная ограниченность функций $y_n(x)$ и их производных, поскольку

$$Y_n \leq Z_n + \Delta_n \leq Ce^{\|a\|}(1 + O(2^{-n})).$$

Обозначим $y(x)$ точное решение задачи (1).

Теорема. *Для любого* $n = 1, 2, \ldots$ *выполняется неравенство*

$$\|y' - z_n'\| \leq e^{\|a\|}(\Omega_n + Ce^{\|a\|}\Omega_n^*). \tag{4}$$

Неравенство (4) можно записать в виде

$$\|y' - z_n'\| = O\big(\omega(a, \tfrac{1}{2^n}) + \omega(b, \tfrac{1}{2^n}) + \tfrac{1}{2^n}\big), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Такое же соотношение будет иметь место для нормы $\|y' - y_n'\|$ для достаточно больших n. Постоянные в O-соотношениях зависят от величин $\|a\|$, $\|b\|$ и $|y_0|$.

Следует заметить, что оценка для уклонения $\|y - z_n\|$ повторяет оценку (4). Можно показать, что улучшения порядка сходимости, как это имеет место для интерполяционных сплайнов, в нашем случае не происходит.

По результатам данных исследований написана программа для численного решения задачи (1). Данные численного эксперимента полностью подтверждают сформулированные утверждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *M. Ohkita, Y. Kobayashi* An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations // IEEE Transactions on Circuit and Systems. 1986. Vol. 33, № 9. P. 853–862.

2. *M. Razzaghi, Y. Ordokhani* An application of rationalized Haar functions for variational problems // Appl. Math. Comp. 2001. Vol. 122, № 3. P. 353–364.

3. *Д. С. Лукомский* Применение системы Хаара для решения задачи Коши // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. Вып. 14. С. 47–50.

4. *Лукомский Д. С., Терехин П. А.* Об оценке погрешности решения задачи Коши с помощью систем сжатий и сдвигов // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань : Изд-во Казан. матем. о-ва, 2015. Т 51. С. 295–297.