УДК 517.95

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА МОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ[1]

А. Г. Лосев (Волгоград, РФ)
allosev59@gmail.com

В данной работе исследуется асимптотическое поведение решений уравнения Пуассона

$$\Delta u - c(x)u = f, \tag{1}$$

где $c(x) \geq 0$, на модельных (сферически-симметричных) римановых многообразиях. В частности, найдены условия однозначной разрешимости задачи Дирихле с непрерывными граничными данными на «бесконечности».

В течение последних четырех десятков лет было опубликовано множество работ, посвященных нахождению условий выполнения теорем типа Лиувилля о тривиальности различных классов решений и субрешений линейных и нелинейных дифференциальных уравнений на некомпактных римановых многообразиях. Кроме того, многие исследования были посвящены оценке размерностей различных пространств решений линейных эллиптических уравнений, а также вопросам разрешимости различных краевых задач.

В частности, точные условия выполнения теорем типа Лиувилля и однозначной разрешимости задачи Дирихле для решений различных однородных эллиптических уравнений и неравенств на модельных многообразиях найдены в работах [1–4]. Опишем данные многообразия подробнее.

Пусть M — полное риманово многообразие с пустым краем, представимое в виде $M = B\bigcup D$, где B — компактное множество, а D — изометрично прямому произведению $R_+ \times S$ (где $R_+ = (0, \infty)$, а S — замкнутое риманово многообразие) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2.$$

Здесь $g(r)$ — положительная, гладкая функция на R_+, $d\theta^2$ — метрика на S. В качестве примеров модельных многообразий можно назвать евклидово пространство, пространство Лобачевского, поверхности вращения и другие.

В данной работе изучается асимптотическое поведение решений уравнения (1) в предположении, что на D выполнено $c = c(r)$, а $f = f(\theta)$ — гладкая функция.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02479 р-поволжье-а).

Введем следующие величины:

$$I = \int_1^\infty \frac{dr}{g^{n-1}(r)} \int_1^r g^{n-3}(t)dt,$$

$$J = \int_1^\infty \frac{dr}{g^{n-1}(r)} \int_1^r (1+c(t))g^{n-1}(t)dt,$$

где $\dim M = n$.

В [1] показано, что всякая положительная гармоническая функция на M является тождественной постоянной тогда и только тогда, когда $I = \infty$. В [2] показано, что если $I < \infty$, то для всех $\Phi \in C(S)$ и $\Psi \in C(S)$ существует единственная гармоническая функция на D такая что

$$u(r_0,) = \Phi(\theta)$$

и

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta) = \Psi(\theta).$$

Там же показано что если $I < \infty$ то для любой $\Psi \in C(S)$ существует единственная гармоническая функция на M такая что

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta) = \Psi(\theta).$$

Аналогичные результаты для решений стационарного уравнения Шредингера получены в [3]. Условия выполнения теорем типа Лиувилля для положительных решений некоторых эллиптических неравенств на модельных многообразиях получены, в частности, в [4].

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.*Пусть многообразие M такое что*

$$J < \infty.$$

Тогда для любых $\Phi \in C(S)$ и $\Psi \in C(S)$ существует единственное решение уравнения (1) *на D такое что*

$$u(r_0,\theta) = \Phi(\theta)$$

и

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta) = \Psi(\theta).$$

Теорема 2.*Пусть многообразие M такое что*

$$J < \infty.$$

Тогда для любой $\Psi \in C(S)$ *существует единственное решение уравнения* (1) *на* M *такое что*

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta) = \Psi(\theta).$$

При доказательстве данных утверждений, в частности, используется тот факт, что из сходимости интеграла $J < \infty$ следует сходимость $I < \infty$, условие однозначной разрешимости задачи Дирихле для гармонических на M функций ($I < \infty$), а также стандартный прием, заключающийся в представлении решений уравнения (1) в виде суммы гармонической функции с заданными краевыми условиями и решения уравнения (1) с нулевыми краевыми условиями. Техника доказательства основана на представлении решений в виде рядов Фурье по собственным функциям оператора Лапласа – Бельтрами на S и доказательстве их равномерной сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лосев А. Г.* Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида // Изв. вузов. Матем. 1991. № 12. С. 15–23

2. *Лосев А. Г.* Об одном критерии гиперболичности римановых многообразий специального вида // Матем. заметки. 1996. № 59(4). С. 558–564

3. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях // Изв. вузов. Матем. 1999. № 6. С. 41–49

4. *Лосев А. Г., Федоренко Ю. С.* О положительных решениях квазилинейных эллиптических неравенств на некомпактных римановых многообразиях // Матем. заметки. 2007. Т. 81, № 6. С. 867–878

УДК 519.63+523.68

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАЛОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И КРУГОВОГО ЦИЛИНДРОВ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. Т. Лукашенко (Москва, РФ)

lukashenko-vt@yandex.ru

Одной из фундаментальных задач газовой динамики является проблема взаимодействия тел в сверхзвуковом потоке. Связана данная проблема прежде всего с прикладными исследованиями — начиная от вопросов о динамике распада метеорных тел при движении в атмосфере [1] до получения расчётных аэродинамических коэффициентов при обтекании тел в аэродинамических трубах [2].