3. *Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S.* On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic. arxiv.org/abs/1503.08600.

УДК 517.546

ВЛОЖИМОСТЬ ГОЛОМОРФНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМИ НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ В ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКУЮ ПОЛУГРУППУ [1]

О. С. Кудрявцева (Волгоград, РФ)
Kudryavceva_OS@mail.ru

Рассматривается задача вложения голоморфного отображения круга в себя с заданными свойствами в однопараметрическую полугруппу. При этом требуется, чтобы элементы однопараметрической полугруппы обладали теми же свойствами, что и исходное отображение. Установлен критерий вложимости в терминах решения функционального уравнения.

Пусть $\mathfrak{D}$ — совокупность всех голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ функций f, принимающих значения из $\mathbb{D}$, оставляющих инвариантным вещественный диаметр, монотонно возрастающих на вещественном диаметре и имеющих на нём ограниченное искажение. Более точно, $\mathfrak{D}$ – совокупность голоморфных отображений $f\colon \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$, удовлетворяющих условиям:

1) $\operatorname{Im} f(x) = 0$ при $x \in (-1,1)$, $\lim\limits_{x\to\pm1} f(x) = \pm1$;

2) $f'(x) > 0$ при $x \in (-1,1)$ и $\sup\limits_{x\in(-1,1)} f'(x) < \infty$.

$\mathfrak{D}$ образует топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной в $\mathbb{D}$ сходимости.

Определение 1. Под *однопараметрической полугруппой* в $\mathfrak{D}$ понимается непрерывный гомоморфизм $t \mapsto f^t$, действующий из аддитивной полугруппы $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \colon t \geqslant 0\}$ в полугруппу $\mathfrak{D}$.

Определение 2. Функция $f \in \mathfrak{D}$ *вложима в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{D}$, если существует такая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{D}$, что $f^1 = f$.

Описание однопараметрических полугрупп связано с анализом неподвижных точек отображения. Отображения $f^t, t \geqslant 0$, имеют общее множество неподвижных точек, среди которых выделяется так называемая точка Данжуа – Вольфа q, обладающая свойством притяжения $f^t(z) \to q$ при $t \to \infty$ и всех $z \in \mathbb{D}$. Эта точка может располагаться как внутри

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00042 мол_а).

круга $\mathbb{D}$, так и на его границе $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Именно в терминах точки Данжуа – Вольфа записывается классическая формула Берксона – Порты [1], которая описывает множество всех инфинитезимальных образующих однопараметрических полугрупп голоморфных отображений единичного круга в себя.

Все другие неподвижные точки, если они есть, для нетривиальной однопараметрической полугруппы ($f^t(z) \not\equiv z$) должны лежать только на $\mathbb{T}$. Ключевым результатом, дающим возможность изучения вопросов вложимости голоморфного отображения с дополнительными неподвижными точками в однопараметрическую полугруппу, является аналог формулы Берксона – Порты [2].

Отметим, что если $f \in \mathfrak{D}$ имеет внутреннюю неподвижную точку, то эта точка может лежать только на вещественном диаметре. Если же $f \in \mathfrak{D}$ и $f(x) \neq x$ для всех $x \in (-1,1)$, то выражение $f(x) - x$ сохраняет знак, точка $q = \sigma$, где $\sigma = \operatorname{sgn}(f(x) - x)$, является точкой Данжуа – Вольфа, а точка $a = -\sigma$ является дополнительной граничной неподвижной точкой.

Теорема. *Пусть $f \in \mathfrak{D}$ и $f(x) - x$ сохраняет знак для всех $x \in$ $\in (-1,1)$. Тогда если f вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$, то существует голоморфная в $\mathfrak{D}$ функция K, являющаяся решением функционального уравнения*

$$K\left(f(z)\right) = K(z) + 1$$

и допускающая представление в виде

$$K(z) = \lambda_1 \ln \frac{1 + \sigma z}{1 - \sigma z} + \lambda_2 \frac{\sigma z}{(1 - \sigma z)^2} + \lambda_3 \int\limits_{[-\sigma,\, \sigma)} \ln \frac{1 - 2xz + z^2}{(1 - \sigma z)^2} \, \frac{d\mu(x)}{1 - \sigma x} \quad (1)$$

с некоторыми $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_3 \geqslant 0$ и вероятностной мерой μ на $[-\sigma,\, \sigma)$, где $\sigma = \operatorname{sgn}(f(x) - x)$ и под $[a, b)$, если $a > b$, понимается $(b, a]$. При этом, под логарифмами понимаются ветви, принимающие значение 0 при $z = 0$.

Обратно, всякая функция K вида (1) однолистна в $\mathbb{D}$ и отображает $\mathbb{D}$ на область, которая с каждой точкой $w \in K(\mathbb{D})$ содержит и весь луч $\{w + t \colon t \geqslant 0\}$. При этом, функции $f(z) = K^{-1}\big(K(z) + 1\big)$ принадлежат $\mathfrak{D}$, обладают свойством: $f(x) - x$ сохраняет знак для всех $x \in (-1,1)$, причём $\operatorname{sgn}(f(x) - x) = \sigma$, и вложимы в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berkson E., Porta H.* Semigroups of analytic functions and composition operators // Michigan Math. J. 1978. Vol. 25, № 1. P. 101–115.

2. *Горяйнов В. В., Кудрявцева О. С.* Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 7. С. 43–74.

УДК 517.5

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ УОЛША С МАЛЫМИ ЛАКУНАМИ

И. Ф. Курбыко, С. В. Левизов (Владимир, РФ)
levizov@rambler.ru

Пусть $0 \le x \le 1$ и $\{\varphi_n(x)\}$ — система Уолша (в порядке Пэли); $\{n(k)\}$ — некоторая (строго возрастающая) последовательность индексов (номеров). Скажем, что подсистема $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ подчинена закону повторного логарифма (ЗПЛ), если выполнено соотношение:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}(2N\log\log N)^{-1/2}\cdot\sum_{k=1}^{N}\varphi_{n(k)}(x)=1 \quad \text{почти всюду.} \qquad (1)$$

Известно (см. [1]), что если последовательность $\{n(k)\}$ такова, что, начиная с некоторого номера k_0

$$n(k+1)\ge n(k)\cdot(1+c\cdot k^{-\alpha}), \quad \text{где} \quad c>0, \quad 0<\alpha<0,5, \qquad (2)$$

то для подсистемы $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ соотношение (1) имеет место.

Размер «пробелов» (лакун) в последовательности $\{n(k)\}$ регулируется показателем α («густота» последовательности растёт вместе с α), причём «критическим» является рубеж $\alpha = 0,5$ (аналогичный результат справедлив и для другого вероятностного закона — ЦПТ, рассмотренного по отношению к подсистеме $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ — см. об этом [2, 3]). А именно: равенство (1) начинает «пропадать», если строить $\{n(k)\}$, не подчинённую (2) — взяв показатель $\alpha \ge 0,5$.

В то же время ЗПЛ может выполняться и для достаточно «густых» последовательностей $\{n(k)\}$. Справедливо следующее утверждение: пусть $\{c_k\}$ — возрастающая (как угодно медленно) последовательность чисел: $c_k \to \infty$. Тогда существует последовательность $\{n(k)\}$ такая, что величина $n(k+1)/n(k)-1$ при $k\to\infty$ убывает быстрее, чем c_k/k, и при этом для подсистемы $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ равенство (1) выполняется.

Этот факт уточняет результат, полученный в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Takahasi S.* A statistical property of the Walsh functions // Stud. Sci. Math. Hung. 1975. Vol. 10. P. 93–98.