REFERENCES

1. *Wright E. M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // J. Lond. Math. Soc. 1933. Vol. 8. P. 71–79.

2. *Gorenflo R., Luchko .Y, Mainardi F.* Analytic properties and applications of Wright functions // Frac. Cal. Appl. Anal. 1999. Vol. 2. P. 383–414.

3. *Prajapat J. K.* Certain geometric properties of the Wright functions // Integral Transform Spec. Funct. 2015. Vol. 26. P. 203–212.

4. *De-Branges L.* A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math. 1985. Vol. 154. P. 137–152.

УДК 517.9

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ ГОЛОМОРФНЫХ В ШАРЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА[1]

А. В. Абанин (Ростов-на-Дону, Владикавказ, РФ)
abanin@math.rsu.ru

Пусть $\mathbb{B}^N$ — единичный шар в $\mathbb{C}^N$. Полагаем $\mathbb{B}^1 =: \mathbb{D}$ — единичный круг в комплексной плоскости. Для каждого $p \geq 0$ образуем банахово пространство

$$A^{-p}(\mathbb{B}^N) := \{f \in H(\mathbb{B}^N) : \|f\|_p := \sup_{|z|<1} |f(z)|(1-|z|)^p < \infty\},$$

где $H(\mathbb{B}^N)$ — пространство всех голоморфных в $\mathbb{B}^N$ функций.

В соответствии с определением, введенным Ч. Горовицем, Б. Коренблюмом и Б. Пинчуком [1] при $N = 1$, подмножество S в $\mathbb{D}$ называется *определяющим* (*sampling*) для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$, если

$$T_S(f) := \varlimsup_{\zeta\in S, |\zeta|\to 1} \frac{\ln|f(\zeta)|}{|\ln(1-|\zeta|)|} = \varlimsup_{|z|\to 1-0} \frac{\ln|f(z)|}{|\ln(1-|z|)|} =: T(f) \qquad (1)$$

для любой функции $f \in A^{-\infty}(\mathbb{D})$. Ясно, что это понятие без изменений распространяется на случай $N > 1$.

В работе [1] в основном изучался вопрос о взаимосвязи между определяющими множествами для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ и $A^{-p}(\mathbb{D})$. При этом, $S \subset \mathbb{D}$ называется *определяющим* (*sampling*) для пространства $A^{-p}(\mathbb{D})$, если имеется такая постоянная $C > 0$, что $\|f\|_p \leq C\|f\|_{p,S}$ для всех $f \in A^{-p}(\mathbb{D})$. Было показано, что если S является определяющим для всех $A^{-p}(\mathbb{D})$, $p > 0$, то оно будет определяющим и для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$. Было также установлено,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-0140415 а).

что обратный результат, вообще говоря, места не имеет. Причина этого факта осталась неясной.

Л. Х. Хой и П. Томас [2] исследовали взаимосвязь между определяющими и слабо достаточными для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ множествами.

Напомним определение слабо достаточного множества, введенное Д. М. Шнейдером [3]. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}^N$, $\mathcal{V} = (v_n)_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность весов (непрерывных положительных функций) на Ω. Образуем линейное пространство $\mathcal{V}H(\Omega) := \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{v_n}(\Omega)$, где

$$H_{v_n}(\Omega) := \left\{ f \in H(\Omega) : \|f\|_{v_n} := \sup_{z\in\Omega} \frac{|f(z)|}{v_n(z)} < \infty \right\} -$$

банаховы пространства голоморфных в Ω функций. Наделим $\mathcal{V}H(\Omega)$ топологией τ внутреннего индуктивного предела последовательности $(H_{v_n}(\Omega))_{n=1}^{\infty}$. Для подмножества $S \subset \Omega$ определим полунормированные пространства

$$H_{v_n}(\Omega|S) := \left\{ f \in \mathcal{V}H(\Omega) : \|f\|_{v_n,S} := \sup_{\zeta\in S} \frac{|f(\zeta)|}{v_n(\zeta)} < \infty \right\}.$$

Так как $H_{v_n}(\Omega) \hookrightarrow H_{v_n}(\Omega|S) \subset \mathcal{V}H(\Omega)$ ($\hookrightarrow$ — символ непрерывного вложения), то $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_{v_n}(\Omega|S) = H_{v_n}(\Omega)$ и топология τ мажорирует в $\mathcal{V}H(\Omega)$ топологию τ_S внутреннего индуктивного предела последовательности $(H_{v_n}(\Omega|S))_{n=1}^{\infty}$. В случае, когда τ_S совпадает с τ, S называется *слабо достаточным множеством* для $\mathcal{V}H(\Omega)$.

В [2] было показано, что всякое определяющее для пространства $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ множество является для него слабо достаточным и построен пример, показывающий, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Впоследствии в статье [4] эти результаты были тем же методом установлены при $N > 1$.

Х. Бонет и П. Домански [5] ввели и исследовали (p, q)-определяющие множества и с их помощью получили критерий того, что данное множество является определяющим для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$.Это описание оказалось достаточно сложным по форме и трудным для применения.

Во всех упомянутых выше работах — [1, 2, 4, 5] — основной моделью для иллюстрации, а в ряде мест и для обоснования основных результатов выступали, так называемые, инвариантные относительно вращения множества (rotate invariant sets), то есть семейства концентрических окружностей или сфер с центром в начале. Для них удалось установить при $N = 1$ критерии того, что они являются определяющими или слабо достаточными для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$. Следует отметить, что при этом в ряде доказательств использовалась сложная техника, которая опиралась на тонкие одномерные результаты, не имеющие аналогов при $N > 1$. Это стало одной из причин того, что при попытке распространения результатов на многомерный случай, предпринятой в [4], даже для таких простых по структуре множеств это удалось сделать только для тривиальной части предшествующих исследований, когда фактически нет зависимости от размерности N.

В настоящей работе будет представлен новый метод исследования определяющих для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ множеств в смысле [1]. Он основан на использовании слабо достаточных множеств для промежуточных индуктивных пределов $A_{-p}(\mathbb{B}^N) := \mathrm{ind}_{q<p} A^{-q}(\mathbb{B}^N)$. На этом пути удается полностью выяснить топологическую природу определяющих для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ множеств. Как оказалось, это ровно те подмножества $\mathbb{B}^N$, которые обладают универсальной слабой достаточностью — они слабо достаточны сразу для всех пространств $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, $p > 0$, одновременно. Это и есть топологическое отражение алгебраического содержания, заложенного в работе [1] в понятие определяющих для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ множеств. С этой точки зрения, применение к ним термина «определяющий» («sampling») представляется нам недостаточно обоснованным.

С помощью общих результатов о структуре определяющих для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ множеств установлено, что всякое такое множество содержит в себе определяющую для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ последовательность, не имеющую предельных точек в $\mathbb{B}^N$, и получено распространение нетривиальных результатов работ [1] и [5] об инвариантных относительно вращения множеств на многомерный случай. При этом выяснено, что такие инвариантные множества слишком густы, чтобы с их помощью изучать тонкие характеристики слабо достаточных или эффективных множеств для пространств функций полиномиального роста. Оказалось, что с их помощью нельзя даже различить свойство слабой достаточности для индивидуального пространства вида $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ от того же свойства для всех таких пространств одновременно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Horowitz C., Korenblum B., Pinchuk B.* Sampling sequences for $A^{-\infty}$ // Michigan Math. J. 1997. Vol. 44, № 2. P. 389–398.

2. *Khoi L.H., Thomas P.* Weakly sufficient sets for $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ // Publ. Mat. 1998. Vol. 42, № 2. P. 435–448.

3. *Schneider.* Sufficient sets for some spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 197. P. 161–180.

4. *Khoi L.H.* Sets of uniqueness, weakly sufficient sets and sampling sets for $A^{-\infty}(\mathbb{B})$ // Bull. Korean Math. Soc. 2010. Vol. 47, № 5. P. 933–950.

5. *Bonet J., Domański P.* Sampling sets and sufficient sets for $A^{-\infty}$ // J. Math. Anal. Appl. 2003. Vol. 277, № 2. P. 651–669.