Теорема 3. *$L_p(G)$-нормы так введенных корневых функций для оператора порядка $n \geq 2$ удовлетворяют обычным оценкам регулярного случая и, в том числе, выполнена антиаприорная оценка В. А. Ильина.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крицков Л. В.* Равномерная оценка порядка присоединенных функций и распределение собственных значений одномерного оператора Шредингера // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 7. С. 1121–1126.
2. *Крицков Л. В.* О безусловной базисности систем корневых функций одномерного сингулярного оператора Шредингера // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1446–1447.
3. *Крицков Л. В.* Представление и оценки корневых функций сингулярных дифференциальных операторов на отрезке // Дифференц. уравнения. I: 1992. Т. 28, № 8. С. 1291–1302; II: 1993. Т. 29, № 1. 64–73.
4. *Савчук А. М, Шкаликов А. А.* Операторы Штурма – Лиувилля с потенциалами распределениями // Тр. ММО. 2003. Т. 64. С. 159–219.
5. *Ильин В. А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // ДАН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048–1053.

УДК 517.5

НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫЙ КМА НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ[1]

Ю. С. Крусс (Саратов, РФ)

KrussUS@gmail.com

Локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно множеству формальных рядов Лорана

$$x = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbf{x}_i t^i,\ k \in \mathbb{Z},\ \mathbf{x}_i = (x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(s-1)}) \in GF(p^s),$$

где $GF(p^s)$ конечное поле [1]. Операции сложения и умножения в поле $F^{(s)}$ задаются равенствами:

$$x \dot{+} y = \sum_{i=k}^{\infty} (\mathbf{x}_i \dot{+} \mathbf{y}_i) t^i, \quad xy = \sum_{l=2k}^{\infty} t^l \sum_{i,j:\ i+j=l} (\mathbf{x}_i \mathbf{y}_j),$$

где $\mathbf{x}_i \dot{+} \mathbf{y}_i$ и $\mathbf{x}_i \mathbf{y}_j$ операции сложения и умножения в поле $GF(p^s)$.

Аддитивную группу поля $F^{(s)}$ обозначим через $F^{(s)+}$, а ее подгруппы через $F_k^{(s)+} = \{(\dots, \mathbf{0}, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots),\ \mathbf{x}_i \in GF(p^s)\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Известно

[1]Работа подготовлена в рамках выполнения проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

[2], что при $s = 1$: $F^{(1)+}$ есть группа Виленкина с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$. При $s > 1$ аддитивная группа $F^{(s)+}$ изоморфна произведению групп Виленкина

$$F^{(s)+} \cong F^{(1)+} \times F^{(1)+} \times \dots \times F^{(1)+} = \left(F^{(1)+}\right)^s . \tag{1}$$

Также известно [2], что система элементов $g_k \in F_k^{(s)} \setminus F_{k+1}^{(s)}$ есть базис в $F^{(s)}$. Любой элемент $x \in F^{(s)}$ можно представить в виде $x = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \boldsymbol{\lambda}_k g_k$, $\boldsymbol{\lambda}_k \in GF(p^s)$. Определим множество

$$H_0^{(s)} = \{h \in F^{(s)} : \ h = \mathbf{x}_{-1} g_{-1} \dot{+} \mathbf{x}_{-2} g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{x}_{-s} g_{-s}\}.$$

Множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе $F_M^{(s)+}$, с носителем $supp(\varphi) \subset F_{-N}^{(s)+}$ обозначим через $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)+})$, $M, N \in \mathbb{N}$. Аналогично, $\mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$ есть множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе ${F_{-N}^{(s)}}^{\perp}$, с носителем $supp(\varphi) \subset F_M^{(s)\perp}$, где ${F_{-N}^{(s)}}^{\perp}$, $F_M^{(s)\perp}$ есть аннуляторы подгрупп $F_{-N}^{(s)+}$, $F_M^{(s)+}$ соответственно. Если функция $\varphi \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ порождает ортогональный КМА, то она удовлетворяет масштабирующему уравнению:

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}), \tag{2}$$

где

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p^s} \sum_{h \in H_0^{N+1}} \beta_h \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)}$$

— маска уравнения (2), $\mathcal{A}$ — оператор растяжения, χ — характер группы $F^{(s)+}$. Если масштабирующая функция некоторого КМА не является тензорным произведением функций одной переменной, то такой КМА называют несепарабельным.

В работе [3] изложен алгоритм построения ортогональной масштабирующей функции $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$ порождающей КМА на локальных полях $F^{(s)}$ положительной характеристики p. Данный алгоритм включает в себя построение N-валидного дерева T, дерева $\tilde{T}$ и графа Γ.

Обозначим $\lambda_{\mathbf{a}_{-N},\dots,\mathbf{a}_{-1},\mathbf{a}_0} = |m_0({F_{-N}^{(s)}}^{\perp} \mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}} \dots \mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}} \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0})|^2$. Обозначим через $(\mathbf{a}_{N-1}, \mathbf{a}_{N-2}, \dots, \mathbf{a}_1, \tilde{\mathbf{a}}_0)$ те вершины графа Γ, с которыми связана вершина $(\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$. Значения маски определим так, чтобы

$$\sum_{\tilde{\mathbf{a}}_0} \lambda_{\mathbf{a}_{-N},\dots,\mathbf{a}_{-1},\tilde{\mathbf{a}}_0} = 1 \text{ и } \lambda_{\mathbf{a}_{-N},\dots,\mathbf{a}_{-1},\tilde{\mathbf{a}}_0} = 0 \quad \forall\, \alpha_0 \notin \{\tilde{\alpha}_0\}. \tag{3}$$

Значение $\lambda_{\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0}}$ примем равным единице.

Теорема 1. *Пусть по N-валидному дереву T построены дерево $\tilde{T}$, гарф Γ и определены значения маски $m_0(\chi)$ так, как указано в равенствах (3). Пусть $\tilde{H} = height(\tilde{T})$. Тогда равенство*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi \mathcal{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$$

определяет ортогональную масштабирующую функцию $\varphi(x) \in \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$, порождающую КМА на локальном поле $F^{(s)}$, причем $M = = \tilde{H} - N$.

КМА, порожденный масштабирующей функцией $\varphi(x)$ из теоремы 1, в силу изоморфизма (1) можно рассматривать как многомерный КМА на произведении групп Виленкина. В некоторых случаях такой КМА будет несепарабельным.

Рассмотрим пример. Пусть $p = s = 2$, $N = 1$. Рассмотрим следующее N-валидное дерево T (рис. 1).

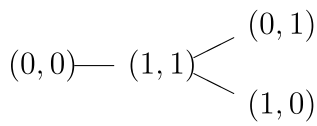

Рис. 1

Аддитивную группу $F^{(2)+}$ локального поля $F^{(2)}$ мы можем рассматривать как произведение групп Виленкина $G \times G$. В этом случае, построенные по алгоритму масштабирующая функция φ и ее преобразование Фурье $\hat{\varphi}$ определены на множествах $G_{-1} \times G_{-1}$ и $G_1^{\perp} \times G_1^{\perp}$ соответственно и принимают значения в соответствии с таблицами на рис. 2, 3.

0	0	1	0
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0

G_{-1}, G_0, G_1

Рис. 2. φ

0	0	1	0
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0

$G_1^{\perp}$, $G_0^{\perp}$, $G_{-1}^{\perp}$

Рис. 3. $\hat{\varphi}$

КМА, порожденный этой масштабирующей функцией, является несепарабельным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И.* Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1999. – 512 с.

2. *Lukomskii S., Vodolazov A.* Non-Haar MRA on local fields of positive characteristic // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 433, iss. 2, pp. 1415–1440. Available online 28 August 2015.

3. *Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S.* On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic. arxiv.org/abs/1503.08600.

УДК 517.546

ВЛОЖИМОСТЬ ГОЛОМОРФНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМИ НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ В ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКУЮ ПОЛУГРУППУ [1]

О. С. Кудрявцева (Волгоград, РФ)
Kudryavceva_OS@mail.ru

Рассматривается задача вложения голоморфного отображения круга в себя с заданными свойствами в однопараметрическую полугруппу. При этом требуется, чтобы элементы однопараметрической полугруппы обладали теми же свойствами, что и исходное отображение. Установлен критерий вложимости в терминах решения функционального уравнения.

Пусть $\mathfrak{D}$ — совокупность всех голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ функций f, принимающих значения из $\mathbb{D}$, оставляющих инвариантным вещественный диаметр, монотонно возрастающих на вещественном диаметре и имеющих на нём ограниченное искажение. Более точно, $\mathfrak{D}$ – совокупность голоморфных отображений $f\colon \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$, удовлетворяющих условиям:

1) $\operatorname{Im} f(x) = 0$ при $x \in (-1, 1)$, $\lim\limits_{x\to\pm1} f(x) = \pm1$;

2) $f'(x) > 0$ при $x \in (-1, 1)$ и $\sup\limits_{x\in(-1,1)} f'(x) < \infty$.

$\mathfrak{D}$ образует топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной в $\mathbb{D}$ сходимости.

Определение 1. Под *однопараметрической полугруппой* в $\mathfrak{D}$ понимается непрерывный гомоморфизм $t \mapsto f^t$, действующий из аддитивной полугруппы $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}\colon t \geqslant 0\}$ в полугруппу $\mathfrak{D}$.

Определение 2. Функция $f \in \mathfrak{D}$ *вложима в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{D}$, если существует такая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{D}$, что $f^1 = f$.

Описание однопараметрических полугрупп связано с анализом неподвижных точек отображения. Отображения $f^t, t \geqslant 0$, имеют общее множество неподвижных точек, среди которых выделяется так называемая точка Данжуа – Вольфа q, обладающая свойством притяжения $f^t(z) \to q$ при $t \to \infty$ и всех $z \in \mathbb{D}$. Эта точка может располагаться как внутри

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00042 мол_а).