СПИСОК ЛИТЕРТУРЫ

1. *Landau E.* Einige Ungleihungen für zweimal differentzierbar Funktionen // Proc. London Math. Soc. 1913. Vol. 2(13). P. 43–49.

2. *Kolmogorov A.* Une generalisation de l'inégalité de M.J.Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées d'une fonction // C.r. séances Soc.math. 1938. Vol. 207. P. 764–765.

3. *Sz.-Nagy B.* Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung // Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. 1941. Vol. 10. P. 64–74.

4. *Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных // Избран. тр. матем. и мех. М. : Наука, 1985, С. 386–390.

5. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // УМН. 1996. Т. 51. № 6, С. 89–124.

6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Неравенства для производных колмогоровского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 12, С. 73–106.

7. *Kwong M. K., Zettl A.* Norm Inequalities for Derivatives and Differences // Lecture Notes in Math. Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag, 1992.

8. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ: Теория и Приложения. Неравенства для производных колмогоровского типа. М. : УРСС, 2000. С. 110–125.

9. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Kolmogorov-type inequalities for derivatives. Berlin : Springer-Verlag, 1993. P. 153–157.

10. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. Киев : Наук. Думка, 2003.

11. *Tikhomirov V., Kochurov A.* Kolmogorov-type inequalities on the whole line or half line and the Lagrange principle in the theory of extremum problems // Eurasian Math. J. 2011. Vol. 2, № 3. P. 125–142.

12. *Стечкин С.Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.

УДК 517.984.52

НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДАЕМЫХ СИЛЬНО СИНГУЛЯРНЫМИ ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Л. В. Крицков (Москва, РФ)
kritskov@cs.msu.ru

Рассматриваются спектральные свойства операторов, соответствующих дифференциальной операции

$$Lu = u^{(n)} + p_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)u' + p_0(x)u, \quad x \in G, \qquad (1)$$

с, вообще говоря, комплекснозначными коэффициентами $p_{n-1}(x), \ldots, p_1(x), p_0(x)$, которые могут быть несуммируемы на всем или на некоторой части интервала задания G операции (1).

1. Исследования (в том числе проведенные автором в [1–3]) показали, что в случае, когда интервал $G = (a, b)$ конечный, в семействе обыкновенных операторов второго ($n = 2$) и более высоких ($n \geq 3$) порядков с локально суммируемыми на G коэффициентами можно выделить класс операторов, по спектральным свойствам близких к «невозмущенному» оператору, порожденному операцией $L_0 = u^{(n)}$.

При $n = 2$ таковым оказалось семейство операторов, для которых коэффициент $p_1(x) \in L_1(G)$ или $p_1(x) \in W_1^1(G)$, а коэффициент $p_0(x)$ удовлетворяет условию

$$(x-a)(b-x)p_0(x) \in L_1(a, b). \qquad (2)$$

Было установлено, что: а) $L_p(G)$-нормы корневых функций оператора удовлетворяют классическим оценкам с тем же порядком по спектральному параметру, что и в регулярном случае [1]; б) полные и минимальные системы корневых функций образуют безусловный базис (базис Рисса) в $L_2(G)$ при выполнении обычных условий В. А. Ильина [2].

При $n \geq 3$ подобное семейство операторов соответствует (1), где $p_{n-1}(x) \in L_1(G)$ или $p_{n-1}(x) \in W_1^{n-1}(G)$, а остальные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$(x-a)^{n-1-k}(b-x)^{n-1-k}p_k(x) \in L_1(a, b), \quad k = \overline{0, n-2}. \qquad (3)$$

Установлено [3], что $L_p(G)$-нормы корневых функций этих операторов также удовлетворяют оценкам регулярного случая.

Отметим, что условия (2) и (3) позволяют рассматривать корневые функции как решения почти всюду в G соответствующих уравнений со спектральным параметром, причем любое такое решение абсолютно непрерывно на замкнутом интервале $\overline{G}$. Тем самым, для корневых функций можно использовать известные формулы среднего значения и сдвига.

2. Появившиеся в конце 1990-х годов работы А. А. Шкаликова, А. М. Савчука и др. (см. [4]) вызвали новый интерес к случаю, когда некоторые коэффициенты в (1) являются распределениями из пространств Соболева с негативной нормой. В этих работах описано несколько способов придать смысл дифференциальной операции (1).

В нашей работе предлагается еще один способ «регуляризации» (1), который, по своей сути, близок к предложенному ранее методу аппроксимации резольвенты, но позволяет при изучении корневых функций использовать те же интегральные представления, что и в регулярном случае.

Опишем этот подход на примере дифференциальной операции (1) второго порядка вида

$$Lu = -u'' + q(x)u, \quad x \in G, \tag{4}$$

в которой $q(x) \in W_2^{-1}(G)$.

Пусть $f \in L_1(G)$ и $\mu \in \mathbb{C}$. Квазирегулярным решением уравнения $Lu = \mu^2 u + f$ назовем функцию $u(x) \in W_2^1(\overline{G})$, которая удовлетворяет для всех $x \in G$ и $t \leq \operatorname{dist}(x, \partial G)$ интегральному соотношению

$$u(x \pm t) = c_0 \cos \mu t \pm c_1 \mu^{-1} \sin \mu t + \int_0^t Q(x, x \pm \tau) u(x \pm \tau) \times \\ \times \cos \mu(t - \tau)\, d\tau - \int_0^t Q(x, x \pm \tau) u'(x \pm \tau) \mu^{-1} \sin \mu(t - \tau)\, d\tau, \tag{5}$$

где $Q(x, y) = \int_x^y q(\xi)\, d\xi \in L_2(y \in G)$ и $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ – произвольные постоянные. Корневыми функциями, отвечающими (4), будем называть нетривиальные квазирегулярные решения соответствующих уравнений со спектральным параметром. Отметим, что в (5) $c_0 = u(x)$, $c_1 = \lim_{t \to 0}[u'(x + t) - Q(x, x + t)u(x + t)]$.

Теорема 1. *$L_p(G)$-нормы так введенных корневых функций удовлетворяют обычным оценкам регулярного случая и, в том числе, выполнена антиаприорная оценка В. А. Ильина.*

Теорема 2. *Справедлива теорема В. А. Ильина* [5] *о безусловной базисности в $L_2(G)$ системы корневых функций.*

3. Анализ формулы сдвига, которой удовлетворяют регулярные решения уравнения $Lu = \mu^n u + f$, $f \in L_1(G)$, для операции (1) с гладкими коэффициентами, дает возможность применить описанный подход для операции любого порядка $n \geq 2$. В результате допустимыми становятся следующие семейства операторов.

а) При $n = 2m$ коэффициенты (1) удовлетворяют условиям:

$$p_{2m-1}(x), \ldots, p_m(x) \in L_2(G), \ p_k(x) \in W_2^{-m+k}(G), \ k = \overline{0, m-1}, \tag{6}$$

и квазирегулярное решение уравнения рассматривается в классе $W_2^m(G)$.

б) При $n = 2m + 1$ коэффициенты (1) удовлетворяют условиям:

$$p_{2m}(x), \ldots, p_m(G) \in L_2(G), \ p_k(x) \in W_1^{-m+k}(G), \ k = \overline{0, m-1}, \tag{7}$$

квазирегулярное решение рассматривается в классе $W_1^{m+1}(G)$.

Теорема 3. *$L_p(G)$-нормы так введенных корневых функций для оператора порядка $n \geq 2$ удовлетворяют обычным оценкам регулярного случая и, в том числе, выполнена антиаприорная оценка В. А. Ильина.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крицков Л. В.* Равномерная оценка порядка присоединенных функций и распределение собственных значений одномерного оператора Шредингера // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 7. С. 1121–1126.
2. *Крицков Л. В.* О безусловной базисности систем корневых функций одномерного сингулярного оператора Шредингера // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1446–1447.
3. *Крицков Л. В.* Представление и оценки корневых функций сингулярных дифференциальных операторов на отрезке // Дифференц. уравнения. I: 1992. Т. 28, № 8. С. 1291–1302; II: 1993. Т. 29, № 1. 64–73.
4. *Савчук А. М, Шкаликов А. А.* Операторы Штурма – Лиувилля с потенциалами распределениями // Тр. ММО. 2003. Т. 64. С. 159–219.
5. *Ильин В. А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // ДАН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048–1053.

УДК 517.5

НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫЙ КМА НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ[1]

Ю. С. Крусс (Саратов, РФ)
KrussUS@gmail.com

Локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно множеству формальных рядов Лорана

$$x = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbf{x}_i t^i,\ k \in \mathbb{Z},\ \mathbf{x}_i = (x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(s-1)}) \in GF(p^s),$$

где $GF(p^s)$ конечное поле [1]. Операции сложения и умножения в поле $F^{(s)}$ задаются равенствами:

$$x \dot{+} y = \sum_{i=k}^{\infty} (\mathbf{x}_i \dot{+} \mathbf{y}_i) t^i, \quad xy = \sum_{l=2k}^{\infty} t^l \sum_{i,j:\ i+j=l} (\mathbf{x}_i \mathbf{y}_j),$$

где $\mathbf{x}_i \dot{+} \mathbf{y}_i$ и $\mathbf{x}_i \mathbf{y}_j$ операции сложения и умножения в поле $GF(p^s)$.

Аддитивную группу поля $F^{(s)}$ обозначим через $F^{(s)+}$, а ее подгруппы через $F_k^{(s)+} = \{(\dots, \mathbf{0}, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots),\ \mathbf{x}_i \in GF(p^s)\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Известно

[1]Работа подготовлена в рамках выполнения проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).