УДК 517.518.8

НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ НОРМАМИ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ [1]

А. С. Кочуров (Москва, РФ)

kochurov@mech.math.msu.su

Колмогоровскими неравенствами для производных (или неравенствами Ландау – Колмогорова) на прямой или полупрямой называют неравенства

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \leqslant K \cdot \|x(\cdot)\|^{\alpha}_{L_p(T)} \|x^{(n)}(\cdot)\|^{\beta}_{L_r(T)}, \qquad x(\cdot) \in \mathcal{W}^n_{p,r}(T),$$

в которых T — это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_-$, $n, k \in \mathbb{Z}_+$, $k < n$, $\mathcal{W}^n_{p,r}(T)$ — функции $x(\cdot)$ из $L_p(T)$, обладающие локально абсолютно непрерывной производной $x^{(n-1)}(\cdot)$ порядка $(n-1)$ на T и производной $x^{(n)}(\cdot)$ порядка n, лежащей в пространстве $L_r(T)$, α, β — положительные числа, в сумме равные 1. Наименьшая возможная константа $K > 0$ в этом неравенстве является решением экстремальной задачи

$$\Big(\int\limits_T |x^{(k)}|^q\,dt\Big)^{1/q} \to \sup \quad \int\limits_T |x|^p\,dt \leqslant 1, \quad \int\limits_T |x^{(n)}|^r\,dt \leqslant 1, \qquad (1)$$

по всем функциям $x(\cdot) \in \mathcal{W}^n_{p,r}(T)$. Она называется константой Колмогорова (или константой Ландау – Колмогорова). Первая задача такого вида, когда $p = q = r = \infty$, $n = 2$, $k = 1$, была решена Ландау (1913) для полупрямой [1] и Адамаром (1914) для прямой. В 1937 г. Колмогоров [2] обобщил результат Адамара и нашёл точное значение в (1) для $p = q = r = \infty$, $T = \mathbb{R}$ при всех возможных значениях n, k. К настоящему времени решение (1) в общем случае не известно, его удаётся получить лишь при определённых частных значениях параметров p, q, r, T, n и k. Такие решения для произвольных k и n были найдены Харди – Литтльвудом – Полиа, Стейном, Тайковым, Любичем – Купцовым, Габушиным и др. Кроме того имеется ряд работ, в которых решения найдены при малых значениях n (в основном $n = 2$) для некоторых частных значений остальных параметров p, q, r, T и k. Известные точные константы K и способы их нахождения приводятся в [4–11]. Точные решения в (1) имеют большое значение для различных задач восстановления функционалов (см., например, [8]), они появляются также в задаче о наилучшем приближении оператора дифференцирования [12].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00642, № 14-01-00744).

В 1941 году Надем ([3], см. также [10]) было найдено решение (1) для всех возможных $p, q > 0$, $r \geqslant 1$ и $T = \mathbb{R}$, $n = 1$, $k = 0$. Пусть $p, q \in (0, \infty)$, $r \in (1, \infty)$ a, η, $\sigma > 0$ и выполнено неравенство $1/q \leqslant 1/p$. На полупрямой $\mathbb{R}_-$ рассмотрим задачу:

$$-\int\limits_{\mathbb{R}_-} |x|^q \, dt \to \inf \quad \int\limits_{\mathbb{R}_-} |x|^p \, dt = \eta^p, \ \int\limits_{\mathbb{R}_-} |\dot{x}|^r \, dt = \sigma^r \tag{2}$$

$\big(\dot{x}(\cdot)$ — производная по переменной t функции $x(\cdot)\big)$ и задачу

$$-\int\limits_{\mathbb{R}_-} |x|^q \, dt \to \inf \quad \int\limits_{\mathbb{R}_-} |x|^p \, dt = \eta^p, \ \int\limits_{\mathbb{R}_-} |\dot{x}|^r \, dt = \sigma^r, \ x(0) = a. \tag{3}$$

Пусть

$$a_0 = (1 - s_0)^{s_0 - 1} \sigma^{1 - s_0} \eta^{s_0}, \quad s_0 = (1 + r'/p)^{-1}, \quad 1/r + 1/r' = 1,$$

$a \leq a_0$. Тогда из системы с двумя уравнениями

$$\left(\int\limits_0^{B^{1/(q-p)}} + \tau \int\limits_{B^{1/(q-p)}}^{a} \right) z^p \left(\frac{Bz^p - z^q}{A(r-1)} \right)^{-1/r} dz = \eta^p,$$

$$\left(\int\limits_0^{B^{1/(q-p)}} + \tau \int\limits_{B^{1/(q-p)}}^{a} \right) \left(\frac{Bz^p - z^q}{A(r-1)} \right)^{1-1/r} dz = \sigma^r,$$

можно однозначно определить значения $A, B > 0$, $\tau \in \{-1, +1\}$. В этом случае обозначим

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(a, \eta, \sigma) = -\left(\int\limits_0^{B^{1/(q-p)}} + \tau \int\limits_{B^{1/(q-p)}}^{a} \right) z^q \left(\frac{Bz^p - z^q}{A(r-1)} \right)^{-1/r} dz.$$

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < q < \infty$, $r \in (1, \infty)$, a, η, $\sigma > 0$, $a \leq a_0$. *Тогда решение задачи* (3) *равно* $\mathcal{J}(a, \eta, \sigma)$. *Если же* $a > a_0$, *то в задаче* (3) *нет допустимых функций.*

Как следствие теоремы 1 получаем

Теорема 2 (см. [3]) *Пусть* $0 < p < q < \infty$, $r \in (1, \infty)$, η, $\sigma > 0$. *Тогда значение задачи* (2) *равно*

$$\widehat{\mathcal{J}} = -\frac{p + r'}{q - p} B\Big(\frac{s}{q - p}, 1/r' \Big)^{\frac{p-q}{s}} \Big(\sigma^{-r} \frac{1}{q + r'} \Big)^{\frac{p-q}{sr}} \Big(\eta^{-p} \frac{1}{q - p} \Big)^{\frac{-qr - r + q}{sr}},$$

$s = 1 + p/r'$, $B\big(\frac{s}{q-p}, 1/r'\big)$ *— бета-функция в точке* $\big(\frac{s}{q-p}, 1/r'\big)$.

СПИСОК ЛИТЕРТУРЫ

1. *Landau E.* Einige Ungleihungen für zweimal differentzierbar Funktionen // Proc. London Math. Soc. 1913. Vol. 2(13). P. 43–49.

2. *Kolmogorov A.* Une generalisation de l'inégalité de M.J.Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées d'une fonction // C.r. séances Soc.math. 1938. Vol. 207. P. 764–765.

3. *Sz.-Nagy B.* Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung // Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. 1941. Vol. 10. P. 64–74.

4. *Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных // Избран. тр. матем. и мех. М. : Наука, 1985, С. 386–390.

5. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // УМН. 1996. Т. 51. № 6, С. 89–124.

6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Неравенства для производных колмогоровского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 12, С. 73–106.

7. *Kwong M. K., Zettl A.* Norm Inequalities for Derivatives and Differences // Lecture Notes in Math. Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag, 1992.

8. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ: Теория и Приложения. Неравенства для производных колмогоровского типа. М. : УРСС, 2000. С. 110–125.

9. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Kolmogorov-type inequalities for derivatives. Berlin : Springer-Verlag, 1993. P. 153–157.

10. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. Киев : Наук. Думка, 2003.

11. *Tikhomirov V., Kochurov A.* Kolmogorov-type inequalities on the whole line or half line and the Lagrange principle in the theory of extremum problems // Eurasian Math. J. 2011. Vol. 2, № 3. P. 125–142.

12. *Стечкин С.Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.

УДК 517.984.52

НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДАЕМЫХ СИЛЬНО СИНГУЛЯРНЫМИ ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Л. В. Крицков (Москва, РФ)
kritskov@cs.msu.ru

Рассматриваются спектральные свойства операторов, соответствующих дифференциальной операции

$$Lu = u^{(n)} + p_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)u' + p_0(x)u, \quad x \in G, \qquad (1)$$

с, вообще говоря, комплекснозначными коэффициентами $p_{n-1}(x), \ldots, p_1(x), p_0(x)$, которые могут быть несуммируемы на всем или на некоторой части интервала задания G операции (1).