УДК 517.984

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ[1]

В. В. Корнев (Саратов, РФ)
KornevVV@info.sgu.ru

Рассмотрим задачу

$$u''_{tt}(x,t) = u''_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad 0 \le x \le 1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = u(x,0) = u'_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

где $q(x) \in C[0,1]$ и $f(x,t), f'_t(x,t) \in C([0,1] \times \mathbb{R})$. Для существования классического решения этой задачи с необходимостью должно выполняться условие

$$f(0,0) = f(1,0) = 0. \tag{3}$$

Задача (1)–(2) является частным случаем задачи, рассмотренной в [1]. Согласно [1] при сделаннных предположениях ряд, построенный по методу Фурье для задачи (1)–(2), сходится к классическому решению этой задачи.

Традиционно при обосновании метода Фурье для задачи (1)–(2) вводят в отличие от (3) дополнительное условие

$$f(0,t) = f(1,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

причем в [2] утверждается , что это условие является необходимым для существования классического решения задачи (1)–(2). Следующий пример показывает, что условие (4) не является необходимым.

Рассмотрим смешанную задачу

$$u''_{tt}(x,t) = u''_{xx}(x,t) - t, \tag{5}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = u(x,0) = u'_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Введем функцию

$$v(x,t) = \frac{1}{8}x(x+t)(x+3t) + g\Big(\frac{1}{2}(x-t)\Big) - g\Big(-\frac{1}{2}(x+t)\Big),$$

где $g(x) = \frac{1}{2}x^2(1-x)$ при $0 \le x \le 1$ и продолжена на всю числовую ось по правилу

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

$$g(x+1)-g(x) = -\frac{1}{2}x(1+3x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Односторонние пределы функции $g(x)$ и ее производных до второго порядка включительно в точках $x = 0$ и $x = 1$ совпадают. Следовательно, на основании формулы (6) имеем, что $g(x) \in C^2(\mathbb{R})$. Непосредственные вычисления показывают, что справедливы соотношения

$$v''_{tt}(x,t) = v''_{xx}(x,t) - t, \quad v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad 0 \le x \le 1,\ t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

Далее определим функции

$$\varphi(x) = v(x,0), \quad \psi(x) = v'_t(x,0), \quad 0 \le x \le 1.$$

Очевидно, $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ и $\psi(x) \in C^1[0,1]$. Кроме того, из соотношений (7) следует, что

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0. \tag{8}$$

Теперь продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с $[0,1]$ на $[-1,0]$ нечетным образом, а затем – на всю числовую ось периодически с периодом 2. С помощью равенств (8) нетрудно убедиться, что $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in$ $\in C^1(\mathbb{R})$ и выполняются тождества

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \varphi(1-x) = -\varphi(1+x),$$
$$\psi(-x) = -\psi(x), \quad \psi(1-x) = -\psi(1+x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Из этих свойств функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ вытекает, что функция

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\, d\tau\Big)$$

удовлетворяет соотношениям

$$w''_{tt}(x,t) = w''_{xx}(x,t), \quad w(0,t) = w(1,t) = 0,$$
$$w(x,0) = \varphi(x), \quad w'_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Из соотношений (7) и (9) следует, что функция

$$u(x,t) = v(x,t) - w(x,t)$$

является классическим решением задачи (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О резольвентном подходе в одной смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф. Воронеж. весен. матем. шк. «Понтрягинские чтения–XXVI» (3–9 мая 2015г.). Воронеж : Издат. дом ВГУ, 2015. С. 110–111.

2. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.