УДК 517.94

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ШТУРМА – ЛИУВИЛЯ В $L^2(\mathbb{R}_+)$ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$.[1]

А. И. Козко (Москва, РФ)
prozerpi@yahoo.co.uk

Исследуется спектр оператора $\mathbf{L}_q$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, задаваемого дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$ и граничным условием $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$. В работе изучаются операторы $\mathbf{L}_q$ для потенциалов из класса $\mathbf{Q}$, которые по определению состоят из функций $q \in C[0,+\infty) \bigcap C^2(0,+\infty)$, удовлетворяющих следующим условиям: $q''(x) \geq 0$, начиная с некоторого $x \geq x_0$ и $\ln q(x)/\ln^2 x \uparrow +\infty$, $x \to +\infty$. Для функции класса $\mathbf{Q}$, в частности, справедливо $x(\ln q)' \to +\infty$ и следовательно все потенциалы $q \in \mathbf{Q}$ растут на бесконечности быстрее любой степени x (см., например [1]).

Ввиду быстрого роста $q(x)$ при $x \to +\infty$ оператор $\mathbf{L}_q$ имеет на $\mathbb{R}_+$ дискретный спектр, элементы которого $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ будем считать расположенными в порядке неубывания.

Ставится следующая задача. Найти условие на последовательность s_n такое, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_n^{s_n}$ будет сходящимся.

Данная задача связана с задачей вычисления регуляризованных следов оператора Штурма-Лиувилля, которая изучалась во многих работах, как в $L^2(\mathbb{R}_+)$ например [2, 3], так и с граничными условиями на концах отрезка $[0,\pi]$ в $L^2[0;\pi]$. Процитируем [4]. Там же имеется большой список литературы по этому вопросу.

Приведём один из результатов данной работы:

Теорема 1. *Пусть $q \in \mathbf{Q}$ и $\ln q(x) \sim x^a$, $x \to +\infty$, для некоторого $a \geq 1$. Тогда справедливо*

1. Если для некоторого фиксированного $m \in \mathbb{Z}_+$, выполняется оценка

$$s_n \geq -\mu_0 - \frac{\mu_1(a)\cdot\delta_m}{\ln n} - \mu_0\left(\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{\ln n \cdot \ln\ln n \cdot \dots \cdot \underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{k-\text{раз}} n}\right),$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ начиная с некоторого $n \geq N_0$, где $\delta_m = 0$ при $m = 0$ и $\delta_m = 1$ при остальных m, $\mu_0 = \frac{1}{2}$, $\mu_1(a) = \frac{1+a}{2a}$. Тогда ряд составленный

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00022).

из собственных значений $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\lambda_n)^{s_n}$ *расходится.*

2. Если существует $\theta > 1$ *и* $m \in \mathbb{Z}_+$ *такие, что для всех* $n \in \mathbb{N}$ *начиная с некоторого* $n \geq N_0$ *выполняется*

$$s_n \leq -\mu_0\Delta_{m0} - \frac{\mu_1(a)\cdot\delta_m\cdot\Delta_{m1}}{\ln n} - \\ - \mu_0\left(\sum_{k=2}^{m}\frac{\Delta_{mk}}{\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\dots\cdot\underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{k-\text{раз}} n}\right),$$

где δ_m, μ_0, $\mu_1(a)$ *определены выше и*

$$\Delta_{mk} = \begin{cases} \theta, & m = k, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда ряд составленный из собственных значений $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\lambda_n)^{s_n}$ *сходится.*

В случае $m = 2$ условие, выписанное в теореме 1 на последовательность $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ для расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\lambda_n)^{s_n}$ будет

$$s_n \geq -\mu_0 - \frac{\mu_1(a)}{\ln n} - \frac{\mu_0}{\ln n\cdot\ln\ln n},$$

а условие сходимости ряда

$$s_n \leq -\mu_0 - \frac{\mu_1(a)}{\ln n} - \frac{\mu_0\cdot\theta}{\ln n\cdot\ln\ln n},$$

при некотором $\theta > 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козко А. И.* Асимптотика спектра дифференциального оператора $-y'' + q(x)y$ с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 5. С. 611–622.

2. *Печенцов А. С.* Следы одного класса сингулярных дифференциальных операторов:метод Лидского – Садовничего // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1999. № 5. С. 35–42

3. *Козко А. И., Печенцов А. С.* Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов с каноническими краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 4. С. 11–17

4 *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов // УМН. 2006. Т 61, №5(371). С. 89–156.