Особое внимание уделено условиям разрешимости уравнения $A\varphi = f$, которые удается записать в виде условий ортогональности $f(t)$ к решениям однородного союзного уравнения.

УДК 517.5

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О СКАЧКЕ НА КОНТУРЕ С ПРОТЯЖЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Б. А. Кац (Казань, РФ), С. Р. Миронова (Казань, РФ), А. Ю. Погодина (Саратов, РФ)
katsboris877@gmail.com, srmironova@yandex.ru, apogodina@yandex.ru

Пусть Γ есть образ открытого интервала $(0,1)$ при его взаимно-однозначном непрерывном отображении $\phi : (0,1) \to \mathbb{C}$. Обозначим $\Gamma_0^\varepsilon := \phi((0,\varepsilon))$, $\Gamma_1^\varepsilon := \phi((1-\varepsilon,1))$, $\Gamma^\varepsilon := \phi([\varepsilon, 1-\varepsilon])$, где $0 < \varepsilon < 1$. Если множества $\Delta_0 := \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \overline{\Gamma_0^\varepsilon}$ и $\Delta_1 := \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \overline{\Gamma_1^\varepsilon}$ состоят из одной точки каждое, причем эти точки не совпадают и не лежат на Γ, то $\overline{\Gamma}$ есть простая жорданова дуга. Если же в этих множествах более одной точки, то будем называть Γ контуром с протяженными особенностями. Примером может служить контур $\Gamma = \{x + i\sin(x^{-1}(1-x)^{-1}) : 0 < x < 1\}$. Здесь $\Delta_j = \{j + iy : -1 \le y \le 1\}$, $j = 0, 1$.

Будем считать, что множество $\overline{\Gamma} = \Gamma \bigcup \Delta_0 \bigcup \Delta_1$ не содержит бесконечно удаленной точки. Назовем контур Γ локально спрямляемым, если при любом $\varepsilon \in (0,1)$ спрямляема дуга Γ^ε.

Данная работа продолжает исследования, начатые авторами в [3], где множество Δ предполагалось прямолинейным отрезком, а кривая Γ сгущалась к ней зигзагообразно. Здесь мы исследуем более общую ситуацию.

Рассмотрим случай, когда множества Γ, Δ_0 и Δ_1 попарно не пересекаются. Будем считать, что контур Γ направлен от Δ_0 к Δ_1. Потребуем, чтобы предельное множество $\Delta := \Delta_0 \bigcup \Delta_1$ состояло из конечного числа спрямляемых дуг и удовлетворяло условию $\Delta \subset \{z : v(z) = 0\}$, где $v(z)$ есть заданная на всей комплексной плоскости функция с непрерывными частными производными первого порядка, такая что произведение $v(z)k(z)$ непрерывно на $\Delta_{0,1}$; такой контур мы будем называть v-допустимым. Здесь

$$k(z) := \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z - z_1}{z - z_0}$$

при фиксированных точках $z_j \in \Delta_j$, $j = 0, 1$, а однозначная ветвь $k(z)$ в $\mathbb{C} \setminus \bar{\Gamma}$ определена условием $k(\infty) = 0$.

Введем в рассмотрение функции $K^j_\nu(z) := k(z)\mathrm{dist}^{\nu-1}(z, \Gamma^\varepsilon_j)$, интегрируемые вблизи Δ_j, $j = 0, 1$ при некотором положительном ε.

Обозначим через $H_\nu(\Gamma)$ множество комплекснозначных функций на Γ, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем ν. Легко видеть, что любая функция этого класса продолжима по непрерывности до определенной на $\bar\Gamma$ функции класса $H_\nu(\bar\Gamma)$. Ниже мы сохраняем за продолженной таким образом функцией ее прежнее обозначение.

Будем искать голоморфную в $\mathbb{C} \setminus \bar\Gamma$ функцию $\Phi(z)$, имеющую в точках $t \in \Gamma$ предельные значения с обеих сторон, связанные соотношением

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \qquad t \in \Gamma. \tag{1}$$

Пусть на компакте A задана функция $f \in H_\nu(A)$. Обозначим через $f^w(z)$ ее продолжение Уитни (см., напр., [1]) на всю комплексную плоскость. Функция $f^w(z)$ совпадает с $f(t)$ на A, непрерывна на всей комплексной плоскости и удовлетворяет там условию Гельдера с тем же показателем ν. Кроме того, в $C \setminus \bar\Gamma$ она имеет частные производные всех порядков, причем $|\nabla f^w(z)| \le C\mathrm{dist}^{\nu-1}(z, A)$, где $C > 0$ не зависит от z. Без ограничения общности можно считать, что $f^w(z)$ имеет компактный носитель, содержащий A внутри себя.

Мы продолжим по Уитни g с $\bar\Gamma$ в $\mathbb{C}$ и рассмотрим произведение $\varphi(z) = g^w(z)k(z)$. Оно имеет на Γ скачок $g(t)$, но не является голоморфным. В [2] такие функции называются квази-решениями задачи о скачке. Применим преобразование, называемое регуляризацией квази-решения:

$$\varphi \to \Phi := \varphi - T\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}, \quad \text{где} \quad Tf := \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_C \frac{f(\zeta)d\zeta d\bar\zeta}{\zeta - z}. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть Γ есть локально спрямляемый v-допустимый контур, множества Γ, Δ_0 и Δ_1 попарно не пересекаются, $g = vg_0$, $g_0 \in H_\nu(\Gamma)$ и $\nu > \frac{1}{2}$. Если функции $v(z)K^j_\nu(z)$ и $k(z)$ интегрируемы вблизи Δ_j, $j = 0, 1$, в степени $p > 2$ при некотором $\varepsilon > 0$, то задача* (1) *разрешима в классе функций, непрерывных на Δ и исчезающих в бесконечно удаленной точке, причем ее решение Φ в этом классе единственно и может быть найдено с помощью* (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

2. *Kats B. A.* The Riemann boundary value problem on non-rectifiable curves and related questions // Complex Variables and Elliptic Equations. 2014. Vol. 59, № 8. P. 1053–1069.

3. *Кац Б. А., Миронова С. Р., Погодина А. Ю.* Задача о скачке на контуре с предельным континуумом // Изв. вузов. Матем. 2015. № 2. С. 70–75.