УДК 517.53/.55

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ НЕКОТОРОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Л. В. Карташева, Т. Н. Радченко (Ростов-на-Дону, РФ)
kartasheva@mail.ru

Пусть L — простой гладкий замкнутый контур, делящий плоскость комплексного переменного на внутреннюю область $\mathcal{D}^+$ и внешнюю $\mathcal{D}^-$, и пусть $t_0 \in L$.

Под $\rho(t) = (t - t_0)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ будем понимать предельное значение аналитической в $\mathcal{D}^+$ функции

$$(z - t_0)^\alpha = |z - t_0|^\alpha e^{\alpha i \arg|t - t_0|}.$$

В классе гельдеровских функций $H_\lambda(L)$ рассматривается сингулярное интегральное уравнение вида:

$$A\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) + c(t)(T\varphi)(t) = f(t),$$

где $T = S - S_\rho$,

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \quad (S_p\varphi)(t) = \frac{\rho(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\rho(\tau)(\tau - t)}\,d\tau.$$

Ранее доказано, что оператор T нильпотентный, а операторы S и S_ρ коммутируют с точностью до оператора T. Доказано также, что оператор $A\colon H_\lambda(L) \to H_\lambda(L)$ нетеров тогда и только тогда, когда $a(t) \pm b(t) \neq 0$ на L, и что разрешимость уравнения $A\varphi = f$ можно рассматривать по отношению к союзному уравнению

$$A'\psi \equiv a(t)\psi(t) - (S_\rho b\psi)(t) + (Tc\psi)(t) = 0$$

в $H_\lambda(L)$.

При $a(t) \pm b(t) \neq 0$ на L уравнение $A\varphi = f$ решается в замкнутой форме в том случае, когда коэффициенты уравнения удовлетворяют равенству:

$$\frac{c(t)}{\chi^+(t)(a(t) + b(t))} = \frac{\ell^+}{t - z}.$$

Получены явные формулы для решения уравнения $A\varphi = f$, когда

$$\operatorname{ind}\frac{a - b}{a + b} > 0,\ < 0,\ = 0.$$

Особое внимание уделено условиям разрешимости уравнения $A\varphi = f$, которые удается записать в виде условий ортогональности $f(t)$ к решениям однородного союзного уравнения.

УДК 517.5

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О СКАЧКЕ НА КОНТУРЕ С ПРОТЯЖЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Б. А. Кац (Казань, РФ), С. Р. Миронова (Казань, РФ), А. Ю. Погодина (Саратов, РФ)
katsboris877@gmail.com, srmironova@yandex.ru, apogodina@yandex.ru

Пусть Γ есть образ открытого интервала $(0,1)$ при его взаимно-однозначном непрерывном отображении $\phi : (0,1) \to \mathbb{C}$. Обозначим $\Gamma_0^\varepsilon := \phi((0,\varepsilon))$, $\Gamma_1^\varepsilon := \phi((1-\varepsilon,1))$, $\Gamma^\varepsilon := \phi([\varepsilon, 1-\varepsilon])$, где $0 < \varepsilon < 1$. Если множества $\Delta_0 := \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \overline{\Gamma_0^\varepsilon}$ и $\Delta_1 := \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \overline{\Gamma_1^\varepsilon}$ состоят из одной точки каждое, причем эти точки не совпадают и не лежат на Γ, то $\overline{\Gamma}$ есть простая жорданова дуга. Если же в этих множествах более одной точки, то будем называть Γ контуром с протяженными особенностями. Примером может служить контур $\Gamma = \{x + i\sin(x^{-1}(1-x)^{-1}) : 0 < x < 1\}$. Здесь $\Delta_j = \{j + iy : -1 \le y \le 1\}$, $j = 0, 1$.

Будем считать, что множество $\overline{\Gamma} = \Gamma \bigcup \Delta_0 \bigcup \Delta_1$ не содержит бесконечно удаленной точки. Назовем контур Γ локально спрямляемым, если при любом $\varepsilon \in (0,1)$ спрямляема дуга Γ^ε.

Данная работа продолжает исследования, начатые авторами в [3], где множество Δ предполагалось прямолинейным отрезком, а кривая Γ сгущалась к ней зигзагообразно. Здесь мы исследуем более общую ситуацию.

Рассмотрим случай, когда множества Γ, Δ_0 и Δ_1 попарно не пересекаются. Будем считать, что контур Γ направлен от Δ_0 к Δ_1. Потребуем, чтобы предельное множество $\Delta := \Delta_0 \bigcup \Delta_1$ состояло из конечного числа спрямляемых дуг и удовлетворяло условию $\Delta \subset \{z : v(z) = 0\}$, где $v(z)$ есть заданная на всей комплексной плоскости функция с непрерывными частными производными первого порядка, такая что произведение $v(z)k(z)$ непрерывно на $\Delta_{0,1}$; такой контур мы будем называть v-допустимым. Здесь

$$k(z) := \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z - z_1}{z - z_0}$$

при фиксированных точках $z_j \in \Delta_j$, $j = 0, 1$, а однозначная ветвь $k(z)$ в $\mathbb{C} \setminus \bar{\Gamma}$ определена условием $k(\infty) = 0$.