УДК 517.984

О ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ НА ПРОСТЕЙШЕМ НЕКОМПАКТНОМ ГРАФЕ С ЦИКЛОМ[1]

М. Ю. Игнатьев (Саратов, РФ)
IgnatievMU@info.sgu.ru

Пусть Γ — геометрический граф, состоящий из замкнутой кривой r_0 длины T и луча r_1, исходящего из некоторой точки $v_1 \in r_0$. Функцию y на графе Γ будем трактовать как пару функций $(y_0(x), x \in [0,T], y_1(x), x \in \in [0,\infty))$.

На цикле r_0 рассмотрим уравнение

$$\ell_0 y_0 \equiv -y_0'' + q_0(x) y_0 = \lambda y_0 = \rho^2 y_0, \tag{1}$$

где комплекснозначная функция q_0 такова, что:

$$\int_0^{T/2} \left(q_0(x) - \frac{\nu_0}{x^2}\right) x^{1-2Re\nu} dx < \infty,$$

$$\int_{T/2}^{T} \left(q_0(x) - \frac{\nu_0}{(x-T)^2}\right) (T-x)^{1-2Re\nu} dx < \infty,$$

$\nu_0 = \nu^2 - 1/4$, $\mathrm{Re}\nu > 1/2$.

На луче r_1 рассмотрим уравнение

$$\ell_0 y_1 \equiv -y_1'' + q_1(x) y_1 = \lambda y_1 = \rho^2 y_1, \tag{2}$$

где комплекснозначная функция q_1 удовлетворяет условию:

$$\int_0^{1} \left(q_1(x) - \frac{\nu_0}{x^2}\right) x^{1-2Re\nu} dx + \int_1^{\infty} x \left(q_1(x) - \frac{\nu_0}{x^2}\right) dx < \infty.$$

Через $S_{0j}(x,\lambda)$, $j = 1,2$ обозначим решения уравнения (1), удовлетворяющие интегральному уравнению п. 2 [1] с $\gamma = 0$, через $S_{Tj}(x,\lambda)$, $j = 1,2$ обозначим решения, построенные аналогично, но с $\gamma = T$. Для

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 1.1436.2014К) и РФФИ (проекты № 15-01-04864, № 16-01-00015).

уравнения (2) аналогично определим решения $S_j(x,\lambda)$, $j=1,2$ (в соответствующем интегральном уравнении полагаем $\gamma=0$). Известно [1], что для функций $S_j(x,\lambda)$, $S_{\gamma j}(x,\lambda)$, $\gamma\in\{0,T\}$ справедливы следующие асимптотики:

$$S_j(x,\lambda)=\beta_j\rho^{-\mu_j}\left(\exp(-i\rho x)[1]_0+\exp(-i\pi\mu_j)\exp(i\rho x)[1]_0\right),$$

$$S_{\gamma j}(x,\lambda)=\beta_{\gamma j}\rho^{-\mu_j}\left(\exp(-i\rho(x-\gamma))[1]_\gamma+\right.$$
$$\left.\exp(i\pi\mu_j\mathrm{sign}(\gamma-x))\exp(i\rho(x-\gamma))[1]_\gamma\right),\quad \rho\to\infty,\quad \mathrm{Im}\rho\geq 0,$$

где числа β_j, $\beta_{\gamma j}$ зависят только от ν, $[1]_\gamma:=1+O\left((\rho(x-\gamma))^{-1}\right)$.

Введем в рассмотрение линейные формы:

$$U_1(y):=\sigma\langle y,S_2\rangle,\ U_{01}(y):=\sigma_0\langle y,S_{02}\rangle,$$

$$U_2(y):=\sigma_1\langle y,S_2\rangle+\sigma_2\langle S_1,y\rangle,\quad U_{02}(y):=\sigma_{01}\langle y,S_{02}\rangle+\sigma_{02}\langle S_{01},y\rangle,$$
$$U_{T1}(y):=\langle y,S_{T2}\rangle,\ U_{T2}(y):=\langle S_{T1},y\rangle,$$

где $\sigma\sigma_0\sigma_2\sigma_{02}\neq 0$.

Определим *решение типа Вейля* $\psi(\rho)=(\psi_0(x,\rho),\psi_1(x,\rho))$, $\mathrm{Im}\rho>0$ как решение системы (1), (2) со следующими свойствами:

1) $\psi_1(x,\rho)=\exp\left(-i\rho x\right)\left(1+o(1)\right)$, $x\to\infty$;

2) выполнены условия склейки:

$$U_1(\psi_1)=U_{01}(\psi_0)=U_{T1}(\psi_0),\quad U_2(\psi_1)+U_{02}(\psi_0)+U_{T2}(\psi_0)=0.$$

Условие G_0**.** $\psi_1(x,\rho)$ непрерывна на некотором множестве вида $\{\rho:\mathrm{Im}\rho\geq 0,\ 0<|\rho|\leq\delta\}$, $\delta>0$ и ограничена при $\rho\to 0$.

Условие G_1**.** Все полюсы $\psi_1(x,\rho)$ — простые. Для любого вещественного $\rho_0\neq 0$ существует конечный предел $\lim\limits_{\rho\to\rho_0,Im\rho>0}\psi_1(x,\rho)$.

Условие R**.** $\sigma_{02}\sigma_1\beta_{T1}\beta_2+\sigma_0\sigma_{12}\beta_{T2}\beta_1\neq 0$.

При выполнении условия G_1 для вещественных $\rho\neq 0$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\psi_1(x,\rho)=\exp(-i\rho x)+r(\rho)\exp(i\rho x)+o(1),\quad x\to\infty.$$

Обозначим через Z множество полюсов функции $\psi_1(x,\rho)$. При выполнении условия G_1 при $\rho_0\in Z$ справедлива асимптотика:

$$\mathrm{res}_{\rho=\rho_0}\psi_1(x,\rho)=\exp(i\rho_0x)(\alpha(\rho_0)+o(1)),\quad x\to\infty.$$

Данными рассеяния назовем набор

$$J=\left\{r(\rho),\ \rho\in\mathbb{R};\ Z,\ \alpha(\rho),\ \rho\in Z\right\}.$$

Рассмотрим обратную задачу восстановления коэффициентов уравнений (1), (2), число ν_0 считаем заданным.

Теорема 1. *При выполнении условий G_0, G_1 и условий регулярности склейки R задание данных рассеяния J однозначно определяет коэффициент $q_1(x), x > 0$ уравнения (2).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yurko V. A.* On integral transforms connected with differential operators having singularities inside the interval // Integral Transforms and Special Functions. 1997. Vol. 5(3–4). P. 309–322.

УДК 517.911.5+517.928.7+517.929.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Е. В. Иконникова (Воронеж, РФ)
uralochka_87@mail.ru

В настоящей статье рассматривается задача об усреднении для дифференциальных включений с быстро осциллирующей правой частью, имеющих вид

$$z'(\tau) \in F\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}, z(\tau - h(\varepsilon)), z'(\tau - h(\varepsilon)), \varepsilon\Big).$$

При решении рассматриваемой задачи было установлено, что, в отличие от однозначного случая из [1], в настоящем принципе усреднения необходимо выполнение дополнительного условия отличия от нуля некоторого многозначного векторного поля на границе области. Данный вариант принципа усреднения является обобщением результата, полученного в работе М. И. Каменского и Ж.-Ф. Кушерона [2], где доказывается существование периодических решений в конечномерном пространстве для дифференциальных уравнений нейтрального типа с запаздыванием.

Введем некоторые обозначения и понятия, которые будут использоваться в настоящей статье. Пусть $Kv(E)$ — набор всех непустых компактных выпуклых подмножеств банахова пространства E; $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$; $\mathrm{B}_E = \mathrm{B}_E(0,1)$; $C_T(\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $L^p_T(\mathbb{R}^n)$ — пространство T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, суммируемых со степенью