УДК 517.984

ЧИСЛЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА С ОСОБЕННОСТЬЮ ТИПА ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ[1]

Л. С. Ефремова (Саратов, РФ)
liubov.efremova@gmail.com

Рассмотрим дифференциальное уравнение Штурма – Лиувилля

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) \tag{1}$$

на отрезке $x \in [0, 1]$.

Дадим корректное определение оператора Штурма – Лиувилля в случае сингулярного потенциала. Пусть $q(x) = u'(x)$, $u(x) \in V$, где V — класс функций с ограниченным изменением, а равенство понимается в смысле распределений, то есть $(q, \varphi) = -(u, \varphi')$ для любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ с компактным носителем на $(0, 1)$. Введем квазипроизводную $y^{[1]}(x) = y'(x) - u(x)y(x)$ и перепишем уравнение (1) в виде

$$-(y^{[1]}(x))' - u(x)y^{[1]}(x) - u^2(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{2}$$

где $x \in [0, 1]$.

Будем считать, что $u(0) = 0$. Добавим две пары краевых условий

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{3}$$

$$y^{[1]}(0) = y(1) = 0. \tag{4}$$

Пусть $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$, $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ - собственные значения краевых задач (2), (3) и (2), (4) соответственно.

В данной работе будем рассматривать потенциал $q(x)$ следующего вида

$$q(x) = q_1(x) + \sum_{j=1}^{m} h_j \delta(x - a_j), \tag{5}$$

где $q_1(x) \in AC[0, 1]$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1436.2014К) и РФФИ (проекты № 14-01-31042, № 15-01-04864, № 16-01-00015).

В случае непрерывности $q(x)$ численные алгоритмы решения обратных задач дают хорошие результаты. В противном случае их использование приводит к ухудшению точности на всем отрезке. Было замечено: используя априорные данные об особенностях потенциала, можно увеличить точность его восстановления. Таким образом, целью данной работы является предоставление процедур восстановления особенностей и самого потенциала вида (5). Ранее были получены результаты для потенциала с конечным числом точек разрыва первого рода [1, 2].

Из (5) получаем: $u(x) = u_1(x) + \sum\limits_{a_j<x} h_j$, где $u_1(x) = \int\limits_0^x q_1(x)dx$. Определим последовательность $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ следующим образом: $\xi_{2n} = \sqrt{\lambda_n}$, $n \geqslant 1$; $\xi_{2n+1} = \sqrt{\mu_n}$, $n \geqslant 0$. Тогда асимптотические формулы для $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ имеют следующий вид [3, 4]:

$$\xi_n = \frac{\pi n}{2} + (-1)^n \int\limits_0^1 u(x)\sin(\pi n x)dx + O(n^{-2}), \quad n \to \infty$$

.

Определим следующую функцию:

$$p_N(x) = \frac{2\pi}{N\beta_N} \sum_{n=N+1}^{2N} w_{n,N} c_n n e^{i\pi n x}, \tag{6}$$

где $c_n = (-1)^n(\xi_n - \frac{\pi n}{2})$, $n \geqslant 1$, $w_{n,N}$ — некоторая оконная функция, $\beta_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=N+1}^{2N} w_{n,N}$ — коэффициент ослабления.

Теорема 1. *Пусть $p_N(x)$ — функция, определенная в (6), где последовательность $w_{n,N}$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. $\frac{1}{N}\sum\limits_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot e^{i\pi n x} \to 0$ равномерно на $[-1,1] \setminus (-\delta,\delta)$ для любого $\delta > 0$;

2. $C_1 < |\beta_N| < C_2$, где C_1, C_2 — некоторые положительные константы.

Тогда $\lim\limits_{N\to\infty} p_N(a_j) = h_j$; $\lim\limits_{N\to\infty} p_N(x) = 0$, $x \neq a_j$, где сходимость является равномерной на любом множестве вида $[0+\varepsilon, 1-\varepsilon] \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m}(a_j - \varepsilon, a_j+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Следствие 1. *Пусть известно, что $a_1 \in [A_1, B_1]$, ... , $a_m \in [A_m, B_m]$, где A_k, B_k — некоторые числа, удовлетворяющие* *неравенствам* $0 < A_1 < B_1 < A_2 < B_2 < ... < A_m < B_m < 1$. *Для всех* $\delta > 0$ *существует* $N(\delta) = N_\delta$ *такое, что: если* $N > N_\delta$ *и* x^* *является точкой глобального максимума функции* $|p_N(x)|$ *на* $[A_j, B_j]$, *то* $x^* \in (a_j - \delta, a_j + \delta)$.

Алгоритм 1. *Пусть даны* $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$, $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$, $[A_1, B_1], ..., [A_m, B_m]$. *Требуется восстановить* a_j, h_j, $j = 1, ..., m$.

1. Определяем $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$: $\xi_{2n} = \sqrt{\lambda_n}, n \geqslant 1$; $\xi_{2n+1} = \sqrt{\mu_n}, n \geqslant 0$.
2. Находим $c_n = (-1)^n(\xi_n - \frac{\pi n}{2})$, $n \geqslant 1$.
3. Конструируем функцию $p_N(x)$ по формуле (6).
4. На каждом отрезке $[A_j, B_j]$ приближенно находим a_j, $j = 1, ..., m$ как глобальный максимум функции $|p_N(x)|$ на этом отрезке.
5. Находим h_j, $j = 1, ..., m$ как $h_j = p_N(a_j)$.

Алгоритм 2. *Пусть даны* a_j, h_j, $j = 1, ..., m$. *Требуется восстановить потенциал.*

1. Находим функцию Вейля исследуемой краевой задачи:

$$M(\lambda) = -\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}}{\prod\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n - \lambda}{(n+\frac{1}{2})^2}}$$

2. Восстанавливаем $q_1(x)$, решая обратную задачу Штурма–Лиувилля на графе (см. [5]) с вершинами $\{0, a_1, ..., a_m, 1\}$ и условиями склейки на внутренних вершинах:

$$y(a_j - 0) = y(a_j + 0),$$

$$y'(a_j - 0) = y'(a_j + 0) - h_j \cdot y(a_j + 0),$$

где $j = 1, ..., m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Efremova L. S., Freiling G.* Numerical solution of inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with discontinuous potentials // Central European Journal of Mathematics. 2013. Vol. 11, iss. 11. P. 2044–2051.

2. *Ефремова Л. С.* Численное решение обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля с разрывным потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 273–279.

3. *Жиков В. В.* Об обратных задачах Штурма–Лиувилля на конечном отрезке // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31, вып. 5. С. 965–976.

4. *Нейман-заде М. И., Савчук А. М.* Операторы Шредингера с сингулярными потенциалами // Тр. МИАН. 2002. Т. 236. С. 262–271.

5. *Юрко В. А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов : Изд-во Сарат. пед. ин-та, 2001. 499 с.