Функция $g(\lambda, r)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \leq r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$;

2) существует постоянная $C > 0$ такая, что $|g(\lambda, r)| \leq C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \leq r$;

3) $g(\lambda, r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ;

4)
$$g\left(re^{i\varphi}, r\right) = O\left(\left|\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right|^{\gamma}\right), \gamma \geq 1.$$

Через $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ обозначим резольвету Фредгольма. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* A^{-1} *существует и* $f(x) \in C\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap V\left[0, \frac{1}{2}\right]$ *при* $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) \in C\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cap V\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *при* $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $f\left(\frac{1}{2} - 0\right) = f(0) - f(1) = 0$. *Тогда*

$$\lim_{r \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{2} \max_{\frac{k-1}{2} \leq x \leq \frac{k}{2}} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda| = r} g(\lambda, r) R_\lambda f(x)\, d\lambda \right| \right) = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубь А. В., Хромов А. П.* Теорема равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с инволюцией, допускающей разрывы // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Информ. 2007. Т. 7, вып. 2, ч. 1. С. 5–10.

УДК 517.97:517.956.2

ОПТИМИЗАЦИЯ В НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ[1]

В. Ю. Гончаров (Москва, РФ)

fulu.happy@gmail.com

Задачи оптимизации функционалов, зависящих от собственных значений систем, описываемых эллиптическими дифференциальными уравнениями в частных производных, встречаются в различных приложениях [1, 2]. Множество таких задач часто возникает в оптимальном проектировании элементов конструкций. Например, для того чтобы расширить безрезонансный интервал частот некоторой конструкции, достаточно максимизировать ее фундаментальную частоту или разницу между соответствующими соседними частотами. Кроме того, часто возникают ситуации, в которых задача оптимального проектирования конструкции

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00827).

или ее элемента включает ограничение снизу на возможные значения частот собственных колебаний. Примерами таких задач являются задачи оптимального проектирования конструкций наименьшего веса. Частоты свободных колебаний конструкции отвечают собственным значениям соответствующей эллиптической краевой задаче. Таким образом, в оптимальном проектировании конструкций существует класс экстремальных задач, связанных с собственными значениями эллиптических операторов.

Исследование экстремальных задач, связанных с собственными значениями эллиптических операторов, сопровождается рядом серьезных математических трудностей. В первую очередь это обуславливается нелинейностью оптимизируемых функционалов и отсутствием гладкой зависимости собственных значений от коэффициентов дифференциальных уравнений, описывающих состояние системы.

В работе доказываются критерии существования и единственности оптимальных решений в задачах оптимизации, связанных с собственными значениями линейных эллиптических краевых задач.

Пусть Ω — ограниченная область $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Далее, пусть $\mathcal{G}$ — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{N}$. Следующие обозначения будут полезными в дальнейшем. Пусть $\mathcal{D}$ — множество всех отображений $(x, \xi) \mapsto f(x, \xi) : \Omega \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ таких, что выполняются следующие условия:

1. $(x, \xi) \mapsto f(x, \xi)$ ограничено для п. в. $(x, \xi) \in \Omega \times \mathcal{G}$;

2. $f(\cdot, \xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathcal{G}$;

3. $f(x, \cdot) : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемо для п. в. $x \in \Omega$;

4. $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}(\cdot, \cdot) : \Omega \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ ограничено п. в. в $\Omega \times \mathcal{G}$, $i = 1, \ldots, r$.

Пусть $\mathcal{D}_+$ суть множество всех отображений $f \in \mathcal{D}$ таких, что отображение

$$f(x, \cdot) : \mathcal{G} \to \mathbb{R} \tag{1}$$

выпукло для п. в. $x \in \Omega$. Далее, определим

$$\mathcal{D}_- = \{f : -f \in \mathcal{D}_+\}, \qquad \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_+ \cap \mathcal{D}_-.$$

Кроме того, через $\mathring{\mathcal{D}}_+$ обозначим множество всех отображений $f \in \mathcal{D}$ таких, что отображение (1) строго выпукло для п. в. $x \in \Omega$.

Пусть $m < s$, а V и W — замкнутые подпространства пространств $H^s(\Omega)$ и $H^m(\Omega)$ соответственно, причем $C_0^\infty(\bar{\Omega}) \subset V \subset W$. Кроме того, допустим, что свойства Ω обуславливают компактность вложения пространства V в W. Далее, пусть $U \subset [L^\infty(\Omega)]^r$ суть непустое выпуклое слабо со звездой компактное множество, элементы которого отображают Ω в $\mathcal{G}$.

Для $u \in U$ рассмотрим билинейные формы $\mathcal{A}_u : V \times V \to \mathbb{R}$ и $\mathcal{B}_u : W \times W \to \mathbb{R}$, определяемые следующим образом:

$$\mathcal{A}_u(y,z) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \le s} \int_\Omega a_{\alpha\beta}\left(x, u(x)\right) \partial^\alpha y(x)\, \partial^\beta z(x)\, dx,$$
$$\mathcal{B}_u(y,z) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} \int_\Omega b_{\alpha\beta}\left(x, u(x)\right) \partial^\alpha y(x)\, \partial^\beta z(x)\, dx,$$

где $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta} \in \mathcal{D}$. Очевидно, формы $\mathcal{A}_u(\cdot,\cdot)$ и $\mathcal{B}_u(\cdot,\cdot)$ непрерывны. Будем предполагать, что они являются также симметричными и коэрцитивными с положительными постоянными, которые не зависят от u.

Для $u \in U$ рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\mathcal{A}_u(y,z) = \lambda \mathcal{B}_u(y,z), \quad z \in V.$$

Пусть $\lambda_k[u]$ — k–ое собственное значение этой задачи. В связи с изложенным выше представляет интерес исследовать следующую задачу оптимизации: найти элемент $\hat{v} \in U$ такой, что

$$\lambda_k[\hat{v}] = \sup_{u \in U} \lambda_k[u]. \tag{2}$$

Приведем некоторые доказанные утверждения.

Теорема 1. *Если*

$$\begin{array}{llllll} a_{\alpha\alpha} \in \mathcal{D}_-, & |\alpha| \le s, & a_{\alpha\beta} \in \mathcal{D}_0, & \alpha \ne \beta, & |\alpha|, |\beta| \le s, \\ b_{\alpha\alpha} \in \mathcal{D}_+, & |\alpha| \le m, & b_{\alpha\beta} \in \mathcal{D}_0, & \alpha \ne \beta, & |\alpha|, |\beta| \le m, \end{array} \tag{3}$$

то существует решение $\hat{v}$ задачи (2).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (3), *и для некоторого решения $\hat{v}$ задачи* (2) *соответствующее собственное значение $\lambda_k[\hat{v}]$ является простым. Пусть $\hat{y}_k$ обозначает k–ый собственный элемент, соответствующий собственному числу $\lambda_k[\hat{v}]$. Если существует такой набор мультиндексов Γ, что*

$$-a_{\gamma\gamma} \in \mathring{\mathcal{D}}_+ \;\; \vee \;\; b_{\gamma\gamma} \in \mathring{\mathcal{D}}_+, \quad \partial^\gamma \hat{y}_k \ne 0 \;\; \text{п. в. в } \; \Omega, \qquad \gamma \in \Gamma,$$

то задача (2) *обладает единственным решением.*

Оказывается, что при довольно близких предположениях справедливо аналогичное утверждение и для случая кратных собственных значений. В [3] приводятся некоторые приложения полученных результатов.

Проводятся дальнейшие исследования в этом направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М. : Наука, 1980. 256 с.

2. *Литвинов В. Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М. : Наука, 1987. 368 с.

3. *Goncharov V. Yu.* On some problems of optimal beam design // Международная конференция по математической теории управления и механике: тез. докл. М. : МИАН, 2015. С. 169–170.

УДК 517.95;517.984

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ И ДВУХТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

А. П. Гуревич, В. П. Курдюмов, А. П. Хромов

1. Рассматривается задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{3}$$

где $q(x) \in C[0,1]$, комплекснозначная,α_1, α_2, β_1, β_2 —комплекснозначные числа и $\psi(x) \in C^1[0,1]$ комплекснозначна, причем

$$\psi'(0) + \alpha_1\psi(0) + \beta_1\psi(1) = \psi'(1) + \alpha_2\psi(0) + \beta_2\psi(1) = 0. \tag{4}$$

В [1], используя резольвентный подход в методе Фурье и прием А. Н. Крылова [2] об ускорении сходимости рядов, подобных рядам Фурье, получено классическое решение задачи (1)–(2) и начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0 \tag{5}$$

при минимальных условиях на $\varphi(x)$. Теперь схожий результат получается в случае начальных условий (3). Представляя $\psi(x)$ в виде

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x), \tag{6}$$

где $\psi_1(x) \in C^1[0,1]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = \psi_1'(0) = \psi_1'(1) = 0$ и $\psi_2(x) \in C^2[0,1]$, $\psi_2(x) \in D_L$ (D_L — область определения оператора $Ly = -y'' + q(x)y$, $y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0$, причем

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).