$$\widehat{d}_k = \langle d, \varphi_k \rangle = a_k(1-q)\sum_{t\in\Omega_r} q^t \Delta^r d(t) \Delta^r M_k^{-r}(t+r), \quad k \geq r$$

и ее ряд Фурье

$$d(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{d}_k \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k d(-r)\frac{(x+r)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \widehat{d}_k a_k M_k^{-r}(x+r).$$

Последний ряд совпадает со смешанным рядом по полиномам Мейкснера $M_k^0(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения. Махачкала : Дагестан. науч. центр РАН, 2004. С. 276.

2. *Гаджиева З. Д.* Смешанные ряды по полиномам Мейкснера : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2004.

УДК 517.51

О СХОДИМОСТИ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПОЧТИ ВСЮДУ[1]

В. В. Галатенко, Т. П. Лукашенко, В. А. Садовничий
(Москва, РФ)

vgalat@imscs.msu.ru, lukashenko@mail.ru, info@rector.msu.ru

Понятие орторекурсивного разложения по последовательности элементов было введено в 1999 году в [1, 2], подробная публикация [3] вышла в 2001 году. Обобщения этого понятия, орторекурсивные разложения по цепочке систем и орторекурсивные разложения по последовательности подпространств были даны в [4, 5]. Приведем определение орторекурсивного разложения по последовательности элементов.

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система нормированных элементов гильбертова пространства H (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Определение 1. *Орторекурсивное разложение* (ОРР) элемента $f \in H$ по последовательности элементов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ осуществляется следующим образом:

1) положим $r_0 = f$;

2) если задан остаток приближения $r_{n-1} \in H$, $n \in \mathbb{N}$, и элемент e_n, то полагаем

$$\hat{f}_n = (r_{n-1}, e_n), \quad r_n = r_{n-1} - \hat{f}_n e_n. \tag{1}$$

Назовем полученные числа $\hat{f}_k$ *орторекурсивными коэффициентами Фурье* элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, а ряд $\sigma(f) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k$ назовем

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00417 и НШ–7461.2016.1.

орторекурсивным рядом Фурье элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}$, его частичная сумма $S_n(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \hat{f}_k e_k$. Легко видеть, что $r_n(f) = f - S_n(f)$ и для ортонормированной системы функций $\{e_k\}$ орторекурсивные коэффициенты Фурье являются обычными коэффициентами Фурье, а орторекурсивный ряд Фурье — обычным рядом Фурье. Из (1) следует равенство Пифагора

$$\|r_{n-1}\|^2 = \|r_n\|^2 + |\hat{f}_n|^2. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$f = r_0 = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_k e_k + r_n \quad \text{и} \quad \|f\|^2 = \|r_0\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|\hat{f}_k\right|^2 + \|r_n\|^2. \tag{3}$$

Из (3) следуют оценка точности приближения $\|f - S_n(f)\|^2 \equiv \equiv \|r_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k \leqslant n} \left|\hat{f}_k\right|^2$, аналог неравенства Бесселя $\|f\|^2 \geqslant \sum\limits_{k} \left|\hat{f}_k\right|^2$ и утверждение, что $f = \sum\limits_{k} \hat{f}_k e_k$ тогда и только тогда, когда выполняется аналог равенства Парсеваля $\|f\|^2 = \sum\limits_{k} \left|\hat{f}_k\right|^2$, причем в случае выполнения аналога равенства Парсеваля оценку точности приближения можно записать в виде $\|f - S_n(f)\|^2 = \|r_n(f)\|^2 = \sum\limits_{k>n} \left|\hat{f}_k\right|^2$.

В теории ортогональных рядов известна теорема Меньшова – Радемахера (см. [6, 7] или [8, с. 332, 532]), утверждающая, что для сходимости почти всюду на $[0, 1]$ ряда ортонормированных функций $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \log_2^2(k+1)$.

Д. Е. Меньшовым в [6] было также показано, что в приведенном условии $\log_2^2(k+1)$ нельзя заменить на любую неубывающую последовательность $o\left(\log_2^2(k+1)\right)$ — растущую медленнее $\log_2^2(k+1)$. Доказывающие этот факт теоремы ряда авторов см. в [8, гл. 9, § 1].

Рассмотрим вопрос об аналогичном условии на коэффициенты орторекурсивных разложений, гарантирующие их сходимость почти всюду.

Теорема 1. *Если пространство Лебега $L^2(\Omega)$, $0 < \mu\Omega < \infty$, сепарабельно, а λ_k — такая строго положительная последовательность, что все $\lambda_k \geqslant 1$ и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty, \tag{4}$$

то для любой функции $f(x) \in L^2(\Omega)$, $\|f(x)\| > 0$, найдется такая нормированная последовательность функций $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, что орторекурсивный ряд $f(x)$ по системе $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не сходится по норме пространства, не сходится поточечно почти всюду на Ω и при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \cdot \lambda_k < \infty.$$

Теорема 2. *Если $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность функций из пространства Лебега $L^2(\Omega)$, нормы которых ограничены в совокупности $\sup\limits_k \|e_k(x)\| = C < \infty$, положительная последовательность $\lambda_k \geqslant 1$ такова, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \Lambda < \infty, \tag{1}$$

а числовая последовательность a_k удовлетворяет уловию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \cdot \lambda_k = L < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x)$ абсолютно сходится почти всюду на Ω и

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k e_k(x)| \right\| \leqslant C\sqrt{L\Lambda}.$$

Замечание. Условия (4) и (5) теорем 1 и 2 показывают, что эти теоремы дополняют друг друга и не могут быть усилены без дополнительных условий.

Ряд из теоремы 1 не сходится по норме пространства, а наибольший интерес вызывают сходящиеся к разлагаемому элементу ряды. В этом случае теорема 2 может быть усилена.

Теорема 3. *Если орторекурсивное разложение функции f по последовательности нормированных функций $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ сходится к f и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left| \hat{f}_k \right|^2 < \infty,$$

то орторекурсивный ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k(x)$ сходится почти всюду на Ω и

$$\left\| \sup_K \left| \sum_{k=1}^{K} \hat{f}_k e_k(x) \right| \right\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k \left| \hat{f}_k \right|^2.$$

Последовательность $\lambda_k = k$ удовлетворяет условию (4), но дополнительное условие сходимости по норме орторекурсивного ряда Фурье элемента f к f влечет сходимость почти всюду.

Обобщением орторекурсивных разложений по последовательности элементов являются введенные в [5] орторекурсивные разложения по последовательности подпространств.

Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, далее под подпространством H понимается замкнутое подпространство.

Определение 2. *Орторекурсивное разложение* элемента $f \in H$ по последовательности подпространств $\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$ осуществляется следующим образом:

1) положим $r_0 = f$;

2) если задан остаток приближения $r_{n-1} \in H$, $n \in \mathbb{N}$, то полагаем, что $\tilde{f}_n$ — ортогональная проекция остатка r_{n-1} на H_n, а остаток $r_n = r_{n-1} - \tilde{f}_n$ — ортогональная проекция r_{n-1} на $H_n^{\perp}$ — ортогональное дополнение H_n в H.

Итак, $\tilde{f}_k$ — *элементы разложения* f по системе подпространств $\{H_k\}$, ряд $\sigma(f) = \sum\limits_k \tilde{f}_k$ — *рекурсивный ряд* элемента $f \in H$ по системе подпространств $\{H_k\}$, *частичной суммой рекурсивного ряда* $\sigma(f)$ с номером n считаем сумму $S_n(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{f}_n = f - r_N(f)$.

В силу свойств ортогональной проекции для каждого n выполняется равенство Пифагора

$$\|r_{n-1}\|^2 = \|r_n\|^2 + |\tilde{f}_n|^2. \tag{5}$$

Из (5) следуют оценка точности приближения $\|f - S_n(f)\|^2 \equiv \equiv \|r_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k\leqslant n} \left\|\tilde{f}_k\right\|^2$, аналог неравенства Бесселя $\|f\|^2 \geqslant \sum\limits_k \left|\tilde{f}_k\right|^2$ и утверждение, что $f = \sum\limits_k \hat{f}_k e_k$ тогда и только тогда, когда выполняется аналог равенства Парсеваля $\|f\|^2 = \sum\limits_k \left|\tilde{f}_k\right|^2$, причем в случае выполнения аналога равенства Парсеваля оценку точности приближения можно записать в виде $\|f - S_n(f)\|^2 = \|r_n(f)\|^2 = \sum\limits_{k>n} \left|\tilde{f}_k\right|^2$.

Если последовательность одномерных подпространств задается последовательностью нормированных векторов, то ОРР по этой последовательности одномерных подпространств совпадает с ОРР по заданной последовательности элементов.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение для ОРР по системе подпространств.

Утверждение. *Если* $\sigma(f) = \sum\limits_n \tilde{f}_k(x)$ *— ОРР функции* $f \in L^2(\Omega)$ *по системе подпространств, положительная последовательность* $\lambda_k \geqslant 1$ *такова, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \Lambda < \infty,$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\tilde{f}_k(x)\|^2 \cdot \lambda_k = L < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k(x)$ *абсолютно сходится почти всюду на* Ω *и*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left| \tilde{f}_k(x) \right| \right\| \leqslant \sqrt{L\Lambda}.$$

Так как ОРР по последовательности подпространств в случае одномерных подпространств совпадают с ОРР по последовательности элементов, то теорема 1 показывает окончательность этого утверждения.

Здесь также дополнительное предположение, что ОРР функции $f \in$ $\in L^2(\Omega)$ по системе подпространств сходится к f позволяет получить более сильное условие сходимости почти всюду.

Теорема 4. *Если орторекурсивное разложение функции* f *по системе подпространств сходится к* f *и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left\| \tilde{f}_k \right\|^2 < \infty,$$

то орторекурсивный ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k(x)$ *сходится почти всюду на* Ω *и*

$$\left\| \sup_K \left| \sum_{k=1}^{K} \tilde{f}_k(x) \right| \right\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k \left\| \tilde{f}_k \right\|^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукашенко Т. П.* Рекурсивные разложения, подобные ортогональным //Математика. Экономика. Экология. Образование. Междунар. симпозиум Ряды Фурье и их приложения (26 мая – 1 июня 1999 г.) : тез. докл. Ростов-н/Д: РГЭА, 1999. С. 331.

2. *Лукашенко Т. П.* Об орторекурсивных разложениях по характеристическим функциям промежутков // Теор. функций, ее приложения и смежные вопросы : материалы шк.-конф., посвящ. 130-летию со дня рожд. Д. Ф. Егорова. Казань : Изд-во Казанск. матем. о-ва, 1999. С. 142–143.

3. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Механ. 2001. № 1. С. 6–10.

4. *Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О рекурсивных разложениях по цепочке систем // ДАН. 2009. Т. 425, № 6. С. 741–746.

5. *Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Орторекурсивные разложения по подпространствам // ДАН. 2012. Т. 445, № 2. С. 135–138.

6. *Меньшов Д. Е.* Sur les séries de fonctions ortogonales // Fund. Math. 1923. Vol. 4. P. 82–105.

7. *Rademacher H.* Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Math. Annalen 1922. Vol. 87. P. 111–138.

8. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : Изд-во АФЦ, 1999. 550 с.

УДК 517.57

ФУНКЦИИ В $\mathbb{C}^n$ С ЗАДАННЫМ АСИМПТОТИЧЕСКИМ МНОЖЕСТВОМ[1]

Е. Г. Ганенкова (Петрозаводск, РФ)
g_ek@inbox.ru

Пусть $D_1, \dots, D_n$ — области в $\mathbb{C}$, $D = D_1 \times \dots \times D_n$, $z_0 = (z_1^0, \dots, z_n^0) \in \in \partial D$ — достижимая граничная точка, т. е. существует кривая $\Gamma \subset D$ с концом в точке z_0. Пусть f — определенная в D функция.

Говорят, что $a \in \overline{\mathbb{C}}$ является асимптотическим значением функции f в точке z_0, если существует такая кривая $\gamma_a \subset D$ с концом z_0, что

$$\lim_{\gamma_a \ni z \to z_0} f(z) = a.$$

Множество всех асимптотических значений (асимптотическое множество) функции f в точке z_0 обозначается $\mathrm{As}(f, z_0)$.

Асимптотические множества подробно изучались для целых и мероморфных в $\mathbb{C}$ функций. Известно, например, что для непостоянной целой функции асимптотическое множество является аналитическим в смысле Суслина и содержит бесконечность (см. [1, 2]). Большое количество статей посвящено построению примеров функций, имеющих заданное асимптотическое множество. W. Gross [3] построил целую функцию, множество асимптотических значений которой совпадает с $\overline{\mathbb{C}}$. M. Heins [4] показал, что каждое аналитическое множество, содержащее бесконечность, является асимптотическим множеством некоторой целой функции. В [5] и [6] теоремы W. Gross'а и M. Heins'а переносятся на случай функций, аналитических в плоских областях произвольной связности. В

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00510а)).