Теорема 2. *Пусть* $r \geq 9$, $C(r) = \exp\left(\frac{2\log r+4}{r}\right) = 1 + o(1)$, $r \to \infty$. *Тогда при* $|D| \geq C(r)p^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\log p+4\log\log p}{2r}\right)$ *справедливо* $|W_D \cap Q| \geq 1$.

В частности, если $r \gg \log p$, то из теоремы 2 следует, что во множестве W_D есть квадраты уже при $|D| \gg p^{1/2}$. Отметим, что при $r \gg \frac{\log p}{\log\log p}$, более точный результат дает теорема 2, а иначе — теорема 1.

При малых r теорему B также можно усилить, пользуясь следующим результатом С. В. Конягина [2].

Теорема C. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/4]$, χ *— нетривиальный мультипликативный характер в* $\mathbb{F}_q$, N_i, H_i *– целые числа,* $p^{1/4+\varepsilon} \leq H_i \leq p$, $i = 1, \ldots, r$, *и*

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{r} x_i a_i : N_i + 1 \leq x_i \leq N_i + H_i, \quad i = 1, \ldots, r \right\}.$$

Тогда

$$\left| \sum_{x \in B} \chi(x) \right| \ll \frac{r^{O(1)}}{\varepsilon} p^{-\varepsilon^2/2} |B|.$$

Используя этот результат, легко показать, что заключение теоремы B справедливо при $t \geq p^{1/4+\varepsilon}$, где $\varepsilon = C\left(\sqrt{\frac{\log r}{\log p}} + \frac{\log\log p}{(\log p)^{1/2}(\log\log p+\log r)^{1/2}}\right)$ с некоторой абсолютной постоянной $C > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dartyge C., Mauduit C., Sárközy A.* Polynomial values and generators with missing digits in finite fields // Funct. Approx. Comment. Math. 2015. Vol. 52, № 1. P. 65–74.

2. *С. В. Конягин* Оценки сумм характеров в конечных полях // Матем. заметки. 2010. Т. 88, № 4. С. 529–542.

УДК 517.52

РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПО СОБОЛЕВУ

Р. М. Гаджимирзаев (Махачкала, РФ)

ramis3004@gmail.com

Пусть $1 \leq r$ — целое. Обозначим через $l_{2,\rho}(\Omega_r)$ пространство дискретных функций $g(x)$, заданных на $\Omega_r = \{-r, -r+1, \ldots, 0, 1, \ldots\}$ и таких, что $\sum_{\Omega_0} g^2(x)\rho(x) < \infty$, где $\rho = \rho(x) = \rho(x; \alpha, q) = q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}$. Через $M_k^\alpha(x)$ обозначим полином Мейкснера порядка k с помощью разностной формулы Родрига

$$M_k^\alpha(x) = \frac{q^{-k}}{k!\rho(x)} \Delta^k \{\rho(x) x^{[k]}\}$$

В настоящей работе показано, что система функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, в которой

$$\varphi_k(x) = \frac{(x+r)^{[k]}}{k!}, \quad 0 \le k \le r-1, \tag{1}$$

$$\varphi_k(x) = a_k M_k^{-r}(x+r), \quad r \le k, \tag{2}$$

где $b^{[k]} = b(b-1)...(b-k+1), a_k = \frac{q^{\frac{k+r}{2}}}{(1-q)^r}$, образуют полную в $l_{2,\rho}(\Omega_r)$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения типа Соболева

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(-r) \Delta^k g(-r) + (1-q) \sum_{t\in\Omega_r} \Delta^r f(t) \Delta^r g(t) q^t. \tag{3}$$

Также установлено, что ряды Фурье – Соболева по этой системе являются частным случаем смешанных рядов по полиномам Мейкснера $M_k^{\alpha}(x)$, введенных И. И. Шарапудиновым (см. [1, 2]). Известно, что система полиномов Мейкснера $\{M_k^{\alpha}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортогональна на $\Omega_0 = \{0, 1, \ldots\}$ с весом $\rho(x)$, т. е.

$$\sum_{x\in\Omega_0} \rho(x) M_k^{\alpha}(x) M_l^{\alpha}(x) = \delta_{k,l} h_k^{\alpha}(q), \quad 0 < q < 1, \quad \alpha > -1,$$

где

$$h_k^{\alpha}(q) = (1-q)^{\alpha+1} \sum_{x\in\Omega_0} \rho(x) \left\{M_k^{\alpha}(x)\right\}^2 = \binom{k+\alpha}{k} q^{-k} \Gamma(\alpha+1). \tag{4}$$

Из (4) следует, что полиномы $m_k^{\alpha}(x) = m_k^{\alpha}(x,q) = \left\{h_k^{\alpha}(q)\right\}^{-1/2} M_k^{\alpha}(x)$ образуют ортонормированную в $l_{2,\rho}(\Omega_0)$ последовательность.

Кроме того, введен новый специальный ряд по полиномам Мейкснера $M_k^{\alpha}(x)$ с $\alpha > -1$, который в случае $\alpha = r$ совпадает с соответствующим смешанным рядом по полиномам Мейкснера $M_k^0(x)$ и рядом Фурье – Соболева по полиномам Мейкснера $M_k^{-r}(x)$. Напомним определение смешанного ряда по полиномам Мейкснера. Для $r \ge 1$, рассмотрим дискретную функцию $d(x) \in l_{2,\rho}(\Omega_r)$. Из того, что $d(x) \in l_{2,\rho}(\Omega_r)$, очевидно, следует, что функция $\Delta^r \bar{d}(x) = \Delta^r d(x-r)$ принадлежит пространству $l_{2,\rho}(\Omega_0)$, поэтому мы можем определить коэффициенты Фурье – Мейкснера этой функции

$$d_{r,k}^{\alpha} = \sum_{t\in\Omega_0} \Delta^r \bar{d}(t) m_k^{\alpha}(t) \rho(t),$$

и рассмотреть ряд при $\alpha = 0$

$$d(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu d(-r) \frac{(x+r)^{[\nu]}}{\nu!} + (x+r)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{r,k}^0}{(k+1)_r} \frac{M_k^r(x,q)}{\{h_k^0(q)\}^{1/2}}. \qquad (5)$$

Это и есть *смешанный ряд* по полиномам Мейкснера.

Специальные ряды по полиномам Мейкснера. Пусть $1 \le r$, $d(x)$ определена на Ω_r,

$$P_{r-1}(x) = P_{r-1}(d,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu d(-r) \frac{(x+r)^{[\nu]}}{\nu!},$$

$$d_r(x) = \frac{d(x) - P_{r-1}(x)}{(x+r)^{[r]}} \qquad (6)$$

Предположим, что для функции $d_r(x)$, определенной равенством (6) существуют коэффициенты Фурье – Мейкснера

$$\widehat{d}_{r,k}^{\alpha} = \sum_{t \in \Omega_0} d_r(t)\rho(t) m_k^\alpha(t) = \sum_{t \in \Omega_0} \frac{d(t) - P_{r-1}(t)}{(t+r)^{[r]}} \rho(t) m_k^\alpha(t).$$

Тогда мы можем рассмотреть ряд Фурье – Мейкснера функции $d_r(x)$

$$d_r(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{d}_{r,k}^{\alpha} m_k^\alpha(x) \qquad (7)$$

Если ряд (7) сходится к функции $d_r(x)$, то с учетом (6)

$$d(x) = P_{r-1}(x) + (x+r)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{d}_{r,k}^{\alpha} m_k^\alpha(x) \qquad (8)$$

Это и есть *специальный ряд по полиномам Мейкснера*. Если $\alpha = r$, то ряд (8) совпадает с рядом (5).

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Функции* $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, *определенные равенствами* (1) *и* (2), *образуют полную в* $l_{2,\rho}(\Omega_r)$ *ортонормированную систему относительно скалярного произведения* (3).

Пусть $d(x) \in l_{2,\rho}(\Omega_r)$. Рассмотрим коэффициенты Фурье этой функции

$$\widehat{d}_k = \langle d, \varphi_k \rangle = \Delta^k d(-r), \quad 0 \le k \le r-1,$$

$$\widehat{d}_k = \langle d, \varphi_k \rangle = a_k(1-q) \sum_{t\in\Omega_r} q^t \Delta^r d(t) \Delta^r M_k^{-r}(t+r), \quad k \geq r$$

и ее ряд Фурье

$$d(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{d}_k \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k d(-r) \frac{(x+r)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \widehat{d}_k a_k M_k^{-r}(x+r).$$

Последний ряд совпадает со смешанным рядом по полиномам Мейкснера $M_k^0(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения. Махачкала : Дагестан. науч. центр РАН, 2004. С. 276.

2. *Гаджиева З. Д.* Смешанные ряды по полиномам Мейкснера : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2004.

УДК 517.51

О СХОДИМОСТИ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПОЧТИ ВСЮДУ[1]

В. В. Галатенко, Т. П. Лукашенко, В. А. Садовничий
(Москва, РФ)
vgalat@imscs.msu.ru, lukashenko@mail.ru, info@rector.msu.ru

Понятие орторекурсивного разложения по последовательности элементов было введено в 1999 году в [1, 2], подробная публикация [3] вышла в 2001 году. Обобщения этого понятия, орторекурсивные разложения по цепочке систем и орторекурсивные разложения по последовательности подпространств были даны в [4, 5]. Приведем определение орторекурсивного разложения по последовательности элементов.

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система нормированных элементов гильбертова пространства H (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Определение 1. *Орторекурсивное разложение* (ОРР) элемента $f \in H$ по последовательности элементов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ осуществляется следующим образом:

1) положим $r_0 = f$;

2) если задан остаток приближения $r_{n-1} \in H$, $n \in \mathbb{N}$, и элемент e_n, то полагаем

$$\hat{f}_n = (r_{n-1}, e_n), \quad r_n = r_{n-1} - \hat{f}_n e_n. \tag{1}$$

Назовем полученные числа $\hat{f}_k$ *орторекурсивными коэффициентами Фурье* элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, а ряд $\sigma(f) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k$ назовем

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00417 и НШ–7461.2016.1.