СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Выгодчикова И. Ю.* О среднегеометрическом приближении сегментной функции алгебраическим полиномом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 11–15.

2. *Выгодчикова И. Ю.* О задаче приближения двузначной функции алгебраическим полиномом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. Вып. 16. С. 18–22.

3. *Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н.* Введение в минимакс. М. : Наука, 1972. 368 с.

4. *Выгодчикова И. Ю.* Алгоритм оценки параметров линейной множественной модели регрессии по минимаксному критерию // Прикладная информатика. 2015. Т. 10, № 4(58). С 105–116.

УДК 517.984

О КВАДРАТАХ ВО МНОЖЕСТВЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНОГО ПОЛЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИ РАЗЛОЖЕНИИ ПО БАЗИСУ[1]

М. Р. Габдуллин (Москва, РФ)

Gabdullin.Mikhail@yandex.ru

Пусть $\mathbb{F}_q$ — поле из $q = p^r$ элементов, $\{a_1, \ldots, a_r\}$ — базис $\mathbb{F}_q$ над $\mathbb{F}_p$. Для множества $D \subset \mathbb{F}_p$ через W_D будем обозначать множество элементов поля F_q, все коэффициенты которых при разложении по базису $\{a_1, \ldots, a_r\}$ принадлежат множеству D. Обозначим через Q множество ненулевых квадратов поля F_q. Положим $Q_0 = Q \cup \{0\}$. Будем считать, что $p \geq 3$, так как в случае $p = 2$ мы имеем $\mathbb{F}_q = Q_0$.

В недавней работе C.Dartyge, C.Mauduit, A.Sárkozy [1] было показано, что если множество D достаточно велико, то во множестве W_D имеются квадраты.

Теорема A. *Пусть $D \subset \mathbb{F}_p$, $2 \leq |D| \leq p - 1$. Тогда при $|D| \geq \geq \frac{(\sqrt{5}-1)p}{2}(1 + o_p(1))$ имеем $|W_D \cap Q_0| \geq 1$.*

В случае, когда множество D состоит из последовательных чисел, в этой же работе был получен аналог предыдущей теоремы.

Теорема B. *Пусть $D = \{0, \ldots, t-1\}$, где $2 \leq t \leq p - 1$. Тогда при $t \gg \sqrt{p}\log p$ имеем $|W_D \cap Q_0| \geq 1$.*

Автору удалось доказать следующие два утверждения, усиливающие теорему A.

Теорема 1. *Пусть $2r - 1 \leq p^{1/2}$, $\delta = \left(\sqrt{p}(2r-1)\right)^{2-r}$. Тогда при $|D| \geq (1+\delta)(2r-1)p^{1/2}$ справедливо $|W_D \cap Q| \geq 1$.*

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00702).

Теорема 2. *Пусть* $r \ge 9$, $C(r) = \exp\left(\frac{2\log r + 4}{r}\right) = 1 + o(1)$, $r \to \infty$. *Тогда при* $|D| \ge C(r)p^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\log p + 4\log\log p}{2r}\right)$ *справедливо* $|W_D \cap Q| \ge 1$.

В частности, если $r \gg \log p$, то из теоремы 2 следует, что во множестве W_D есть квадраты уже при $|D| \gg p^{1/2}$. Отметим, что при $r \gg \frac{\log p}{\log\log p}$, более точный результат дает теорема 2, а иначе — теорема 1.

При малых r теорему B также можно усилить, пользуясь следующим результатом С. В. Конягина [2].

Теорема C. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/4]$, χ *— нетривиальный мультипликативный характер в* $\mathbb{F}_q$, N_i, H_i *– целые числа,* $p^{1/4+\varepsilon} \le H_i \le p$, $i = 1, \ldots, r$, *и*

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{r} x_i a_i : N_i + 1 \le x_i \le N_i + H_i, \quad i = 1, \ldots, r \right\}.$$

Тогда

$$\left| \sum_{x \in B} \chi(x) \right| \ll \frac{r^{O(1)}}{\varepsilon} p^{-\varepsilon^2/2} |B|.$$

Используя этот результат, легко показать, что заключение теоремы B справедливо при $t \ge p^{1/4+\varepsilon}$, где $\varepsilon = C\left(\sqrt{\frac{\log r}{\log p}} + \frac{\log\log p}{(\log p)^{1/2}(\log\log p + \log r)^{1/2}}\right)$ с некоторой абсолютной постоянной $C > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dartyge C., Mauduit C., Sárközy A.* Polynomial values and generators with missing digits in finite fields // Funct. Approx. Comment. Math. 2015. Vol. 52, № 1. P. 65–74.

2. *С. В. Конягин* Оценки сумм характеров в конечных полях // Матем. заметки. 2010. Т. 88, № 4. С. 529–542.

УДК 517.52

РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПО СОБОЛЕВУ

Р. М. Гаджимирзаев (Махачкала, РФ)
ramis3004@gmail.com

Пусть $1 \le r$ — целое. Обозначим через $l_{2,\rho}(\Omega_r)$ пространство дискретных функций $g(x)$, заданных на $\Omega_r = \{-r, -r+1, \ldots, 0, 1, \ldots\}$ и таких, что $\sum_{\Omega_0} g^2(x)\rho(x) < \infty$, где $\rho = \rho(x) = \rho(x; \alpha, q) = q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}$. Через $M_k^\alpha(x)$ обозначим полином Мейкснера порядка k с помощью разностной формулы Родрига

$$M_k^\alpha(x) = \frac{q^{-k}}{k!\rho(x)} \Delta^k \{\rho(x) x^{[k]}\}$$