УДК 517.5

Равномерная рациональная аппроксимация нечетного продолжения степенной функции[1]

Т. С. Мардвилко (Минск, Беларусь)

mardvilko@mail.ru

В работе найдена слабая асимптотика наилучших равномерных рациональных приближений на $[-1,1]$ нечетного продолжения степенной функции. Сильная асимптотика наилучших рациональных приближений на $[0,1]$ степенной функции и ее четного на $[-1,1]$ продолжения ранее найдена Г.Шталем. Из полученных результатов следует, что наилучшие рациональные приближения четного и нечетного продолжений степенной функции имеют одинаковую асимптотику.

Ключевые слова: степенная функция, равномерные рациональные приближения, четное и нечетное продолжения функции.

Благодарности: Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция» (№ГР 20211888).

Uniform rational approximation of the odd continuation of a power function[1]

T. S. Mardvilko (Minsk, Belarus)

mardvilko@mail.ru

The paper presents weak asymptotic behavior of the best uniform rational approximations on $[-1,1]$ of the odd continuation of a power function. Strong asymptotics of the best rational approximations on $[0,1]$ of a power function and its even continuation on $[-1,1]$, found earlier by G. Stahl. From the results obtained it follows that the best rational approximations of the even and odd continuation of a power function have the same asymptotics.

Keywords: power function, uniform rational approximations, even and odd continuations of the function.

Acknowledgements: This work was supported by SPSR "Convergence-2025"(No. 20211888).

Обозначим через $C[a,b]$ пространство непрерывных действительных функций, определенных на отрезке $[a,b]$. Для $f \in C[a,b]$ введем наилучшее равномерное рациональное приближение посредством рациональных функций r степени не выше n:

$$R_n(f;[a,b]) = \inf_r \|f-r\|_{C[a,b]}.$$

В теории аппроксимации изучению наилучших рациональных приближений степенной функции x^α, $x \in [0,1]$, и ее четного продолжения

$|x|^\alpha$, $x \in [-1,1]$, посвящены работы Д.Ньюмена, А.А. Гончара, А.П. Буланова, Н.С. Вячеславова, Г. Шталя и других авторов. Наиболее сильные результаты получены Г. Шталем [1,2]. Именно, он доказал, что при $\alpha \in (0,+\infty) \setminus \mathbb{N}$ справедлива сильная асимптотика

$$R_n\left(x^\alpha;[0,1]\right) \sim 2^{2\alpha+2}|\sin \pi\alpha| e^{-2\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad n \to \infty,$$

а при $\alpha \in (0,+\infty) \setminus 2\mathbb{N}$ для $|x|^\alpha$, $x \in [-1,1]$, — четного продолжения x^α, $x \in [0,1]$, имеет место сильная асимптотика

$$R_n\left(|x|^\alpha;[-1,1]\right) \sim 2^{\alpha+2}\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right| e^{-\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad n \to \infty,$$

Для наилучших равномерных приближений $|x|^\alpha \operatorname{sign} x$, $x \in [-1,1]$, — нечетного продолжения x^α, $x \in [0,1]$, справедлива следующая теорема 1. Нижняя оценка из теоремы 1 и верхняя оценка для $\alpha \in \mathbb{Q}$ ранее были получены Н.С. Вячеславовым [3]. Нами доказана верхняя оценка для произвольного действительного $\alpha > 0$, $\frac{\alpha+1}{2} \notin \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in (0,+\infty)$ *и не является нечетным натуральным числом. Тогда справедлива слабая асимптотика*

$$R_n\left(|x|^\alpha \operatorname{sign} x;[-1,1]\right) \asymp e^{-\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где положительные величины, скрытые символом $\asymp$, *зависят лишь от* α.

Отметим, что асимптотики наилучших рациональных приближений четных и нечетных продолжений некоторых других функций можно найти в работах [4] и [5]. Там также рассмотрены вопросы о связи между наилучшими рациональными приближениями $f \in C[0,1]$, $f(0)=0$, и ее четным и нечетным продолжениями на $[-1,1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Stahl H.* Best uniform rational approximation of x^α на $[0,1]$ // Acta Math. 2003. Т. 190, № 2. С. 241–306.

[2] *Lorenz G. G., Golitschek M. v., Makovoz Y.* Constructive Approximation. Advanced Problems // Springer-Verlag: New York, Berlin, Heidelberg. 1996.

[3] *Вячеславов С. Н.* Рациональные аппроксимации в весовых пространствах на прямой // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1985. № 5. С. 3–10.

[4] *Мардвилко Т. С., Пекарский А. А.* Применение действительного пространства Харди-Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2022. № 3. С. 16–36.

[5] *Мардвилко Т. С.* Равномерная рациональная аппроксимация четного и нечетного продолжений функций // Матем. заметки. 2024. Т. 115, № 2. С. 261–269.