УДК 517.53

О нижнем порядке субгармонической функции с мерой на конечной системе лучей[1]

К. Г. Малютин, М. В. Кабанко (Курск, Россия)
malyutinkg@gmail.com, kabankom@mail.ru

Дж. Майлз (1979) рассматривал целые функции с нулями на конечным числе лучей. В частности, было доказано, что если f – целая функция бесконечного порядка с нулями на конечным числе лучей, то ее нижний порядок равен бесконечности. В данной статье мы доказываем аналогичный результат для класса субгармонических функций бесконечного порядка относительно функции роста, определяемой модельной функцией. Точнее, если субгармоническая функция с мерой на конечном числе лучей имеет бесконечный порядок, относительно функции роста, определяемой модельной функцией, то ее нижний порядок также равен бесконечности.

Ключевые слова: субгармоническая функция, модельная функция, порядок функции.

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-21-00012, https://rscf.ru/project/22-21-00012/).

On the lower order of a subharmonic function with measure on a finite system of rays[1]

K.G. Malyutin, M. V. Kabanko (Kursk, Russia)
malyutinkg@gmail.com, kabankom@mail.ru

J. B. Meles (1979) considered entire functions with zeros restricted to a finite number of rays. In particular, it was proved that if f is an entire function of infinite order with zeros restricted to a finite number of rays, then its lower order equals infinity. In this paper, we prove a similar result for a class of subharmonic functions of infinite order with respect to the growth function determined by the model function. More precisely, if a subharmonic function with a measure on a finite number of rays has infinite order with respect to the growth function determined by the model function, then its lower order is also equal to infinity.

Keywords: subharmonic function, model function, order of function.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 22-21-00012).

Введение

Порядком и нижним порядком целой функции f называются соответственно величины

$$\beta[f] = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}, \quad \alpha[f] = \liminf_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r},$$

где $M(r,f)=\max\limits_{0\le\theta\le 2\pi}|f(re^{i\theta})|$.

В работе [1] Дж. Майлз рассмотрел целые функции с нулями на конечном числе лучей. В частности, было доказано, что если f — целая функция бесконечного порядка с нулями на конечном числе лучей, то ее нижний порядок также равен бесконечности. Результат Дж. Майлза был распространен на аналитические в полуплоскости функции бесконечного порядка [2]. В данной статье мы доказываем аналогичный результат для класса субгармонических функций бесконечного порядка относительно функции роста, определяемой модельной функцией. Точнее, если субгармоническая функция с мерой на конечном числе лучей имеет бесконечный порядок, относительно функции роста, определяемой модельной функцией, то ее нижний порядок также равен бесконечности. Понятие модельной функции роста введено Б.Н. Хабибуллиным [3].

Вспомогательные сведения

Следующее определение принадлежит Б.Н. Хабибуллину [3].

Определение 1. Строго положительная возрастающая неограниченная функция M на $(0,+\infty)$ при выпуклости суперпозиции $M\circ\exp$ на $(-\infty,+\infty)$ называется *модельной функцией роста.*

Введенное здесь понятие модельной функции роста, охватывает большой класс функций. Функции f конечного порядка относительно модельной функции, могут иметь порядок роста в классическом его понимании равный бесконечности или нулю. Например, к модельным функциям роста относятся функции от $r>0$ вида $\exp^{\circ n} r$, где $\exp^{\circ n}$ — n-кратная суперпозиция с $n=1,2,\dots$ показательной функции exp, степени логарифмической функции $\ln^p(e+r)$ при любом $p\ge 1$, и вообще любая дифференцируемая функция $M(r)>0$ при всех $r>0$ с возрастающей функцией $rM'(r)>0$ при всех $r>0$.

Определение 2. Строго положительная дифференцируемая функция V на некотором луче $R_{\rightarrow}:=(a,+\infty)$ называется *уточненной функцией роста относительно модельной функции роста* M, если существует хотя бы один из равных между собой пределов $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)}=$ $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{(\ln V(r))'}{(\ln M(r))'}=\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{(\ln v(x))'}{(\ln m(x))'}=\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{m(x)v'(x)}{m'(x)v(x)}\in[0,+\infty)$, где функция $m\colon x\mapsto M(e^x)$ по определению 1 выпуклая на действительной прямой, а $v\colon x\mapsto V(e^x)$ дифференцируемая на $\ln R_{\rightarrow}:=\{\ln r : r\in R_{\rightarrow}\}$.

Для субгармонической функции v на плоскости $\mathbb{C}$ обозначим $\mathcal{M}_v(r)=\sup\limits_{|z|=r}v(z)$.

Определение 3. Порядком и нижним порядком функции v называются, соответственно, числа

$$\rho_v = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln \mathcal{M}_v(r)}{\ln M(r)}, \quad \alpha_v = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln\ln \mathcal{M}_v(r)}{\ln M(r)}\,.$$

Если $\rho_v < \infty$, то v называется функцией конечного порядка, в противном случае ($\rho_v = \infty$) — функцией бесконечного порядка.

Главный результат

Основным результатом исследований является следующая теорема.

Теорема. *Пусть v — субгармоническая функция на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ бесконечного порядка ρ_v относительно функции роста V, определяемой модельной функцией M, с риссовской мерой на конечном числе лучей $\mathbb{L}_k$:*

$$\mathbb{L}_k = \left\{ z : \arg z = e^{i\theta_k}, \quad 0 \le \theta_k < 2\pi,\ k \in \overline{1, N_0},\ N_0 \in \mathbb{N} \right\}\,.$$

Тогда ее нижний порядок α_v также равен бесконечности.

Для доказательства этого утверждения мы использовали метод рядов Фурье, разработанный Рубелом и Тейлором [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Miles J. B.* On entire functions of infinite order with radially distributed zeros // Pacif. J. Math. 1979. Vol. 81, No 1. Pp. 131–157.

[2] *Malyutin K. G., Kabanko M. V., Shevtsova T. V.* Analytic functions of infinite order in half-plane // Probl. Anal. Issues Anal. 2022. Vol. 11(29), No 2. Pp. 59–71.

[3] *Хабибуллин Б. Н.* Обобщение уточненного порядка // Доклады Башкирского университета. 2020. Т. 5, № 1. С. 1–5.

[4] *Rubel L. A, Taylor B. A.* Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. France. 1968. Vol. 96. Pp. 53–96.