Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Саратовский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского»

ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ
МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

Учебно-методическое пособие
для студентов естественных факультетов

2-е издание, переработанное

Под редакцией профессора *А. А. Игнатьева*

Саратов
Издательство Саратовского университета
2005

УДК 531 (076.5)
ББК 22.213я73
Ф50

Составители :
А. А.Игнатьев (теоретические замечания, лаб. работа № 1),
Л. Л. Страхова (теоретические замечания, лаб. работа № 1),
С. П. Кудрявцева (лаб. работа № 2, 3), *Т. Н. Тихонова* (лаб. работа № 4)

Ф50 **Физический практикум. Момент инерции** : учеб.-метод. пособие для студентов естественных факультетов / сост. : *А. А. Игнатьев, Л. Л. Страхова, С. П. Кудрявцева, Т. Н. Тихонова* ; под ред. проф. А. А. Игнатьева. – 2-е изд. перераб. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. – 40 с. : ил.
ISBN 5-292-03446-0

Учебно-методическое пособие посвящено изучению понятия момента инерции твердого тела в общем физическом практикуме. Приводится общая теория момента инерции. Предлагаются различные методы экспериментального определения моментов инерции тел относительно свободных осей, осуществляется проверка теоремы Штейнера–Гюйгенса. Пособие включает описания к четырем лабораторным работам.

Для студентов естественных факультетов.

Рекомендуют к печати :

кафедра общей физики,
базовая кафедра физики критических
и специальных технологий
Саратовского государственного университета
доктор технических наук *А. В. Ляшенко*
(Саратовский государственный университет)
кандидат физико-математических наук *Т. В. Самородина*
(Саратовский государственный технический университет)

УДК 531 (076.5)
ББК 22.213я73

ISBN 5-292-03446-0

© *А. А. Игнатьев, Л. Л. Страхова, С. П. Кудрявцева, Т. Н. Тихонова*, составление, 2005
© *А. А. Игнатьев, Л. Л. Страхова, С. П. Кудрявцева, Т. Н. Тихонова*, с изменениями, 2012

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Теоретические замечания

Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси описывается уравнением

$$I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\mathbf{M}, \qquad (1)$$

где I – момент инерции твёрдого тела относительно неподвижной оси; $\mathbf{M}$ – момент внешних сил относительно той же оси; $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ – угловое ускорение тела.

Момент инерции твердого тела характеризует инерционные свойства твердого тела по отношению к вращательному движению: чем больше момент инерции I тела при том же самом моменте внешних сил $\mathbf{M}$, тем меньше его угловое ускорение $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$.

Вычислим момент инерции I твердого тела относительно произвольной оси OA. Для этого введем систему координат XYZ с началом отсчета в точке O (рис. 1).

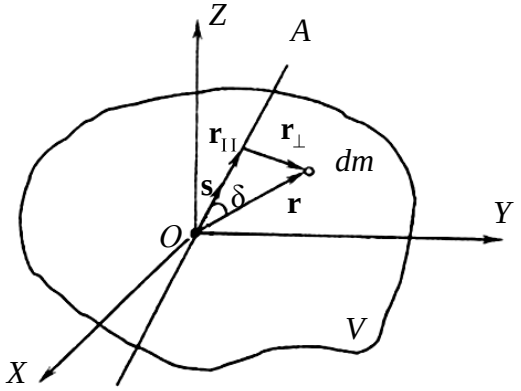

Рис. 1

По определению момент инерции произвольной материальной точки рассчитывается по формуле

$$dI=r_{\perp}^{2}\,dm, \qquad (2)$$

где $r_{\perp}$ – модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}_{\perp}$, перпендикулярного оси вращения (проведен от оси вращения к материальной точке); dm – масса материальной точки (см. рис. 1).

Тогда момент инерции I твердого тела найдем, проведя интегрирование соотношения (2) по всем материальным точкам из объема V тела

$$I=\int dI=\int r_{\perp}^{2}dm. \qquad (3)$$

Обозначим **r** – радиус-вектор материальной точки *dm*, проведенный из начала координат *O*. Тогда из рис. 1 видно, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp},$$

где $\mathbf{r}_{\parallel}$ направлен по оси вращения *OA*, а вектор $\mathbf{r}_{\perp}$ – перпендикулярно к оси вращения.

Кроме того,

$$r^2 = r_{\parallel}^2 + r_{\perp}^2 . \tag{4}$$

Отсюда

$$r_{\perp}^2 = r^2 - r_{\parallel}^2 . \tag{5}$$

Подставим выражение для $r_{\perp}^2$ из (5) в (3)

$$I = \int (r^2 - r_{\parallel}^2) dm. \tag{6}$$

Введем единичный вектор **s**, сонаправленный с осью вращения *OA*. Из рис. 1 видно

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma,$$
$$|\mathbf{s}| = 1,$$

где $s_x = \cos\alpha$; $s_y = \cos\beta$; $s_z = \cos\gamma$ – направляющие косинусы оси *OA*.

Тогда $r_{\parallel} = \mathbf{r}\cdot\mathbf{s} = r\cdot\cos\delta$, где δ – угол между радиусом-вектором **r** и осью вращения *OA*.

Учтем, что $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ и $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, где **i**, **j**, **k** – орты осей *OX*, *OY*, *OZ* соответственно. Следовательно,

$$r_{\parallel} = x\cdot s_x + y\cdot s_y + z\, s_z. \tag{7}$$

Подставив выражения для r^2 и $r_{\parallel}^2$ в соотношение (6), получим:

$$\begin{aligned} I &= \int [(x^2 + y^2 + z^2) - (x\cdot s_x + y\cdot s_y + z\cdot s_z)^2] dm = \\ &= \int [x^2 + y^2 + z^2 - (x^2 s_x^2 + y^2 s_y^2 + z^2 s_z^2 + 2xy s_x^2 s_y^2 + 2xz s_x^2 s_z^2 + 2yz s_y^2 s_z^2)]\cdot dm = \\ &= \int [x^2(1 - s_x^2) + y^2(1 - s_y^2) + z^2(1 - s_z^2) - 2xy s_x^2 s_y^2 - 2xz s_x^2 s_z^2 - 2yz s_y^2 s_z^2]\cdot dm. \end{aligned} \tag{8}$$

Так как $s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$, то

$$\begin{aligned} 1 - s_x^2 &= s_y^2 + s_z^2 , \\ 1 - s_y^2 &= s_x^2 + s_z^2 , \\ 1 - s_z^2 &= s_x^2 + s_y^2 . \end{aligned} \tag{9}$$

Подставим соотношения (9) в формулу (8)

$$
\begin{aligned}
I &= \int [x^2(s_y^2+s_z^2)+y^2(s_x^2+s_z^2)+z^2(s_x^2+s_y^2)-2xys_xs_y-2xzs_xs_z-2yzs_ys_z]\cdot dm = \\
&= \int [s_x^2(y^2+z^2)+s_y^2(x^2+z^2)+s_z^2(x^2+y^2)-2xys_xs_y-2xzs_xs_z-2yzs_ys_z]\cdot dm = \\
&= \int s_x^2(y^2+z^2)\cdot dm+\int s_y^2(x^2+z^2)\cdot dm+\int s_z^2(x^2+y^2)\cdot dm - \\
&- \int 2xys_xs_y dm-\int 2xzs_xs_z dm-\int 2yzs_ys_z dm.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= \int (y^2+z^2)\, dm, \\
I_{yy} &= \int (x^2+z^2)\, dm, \\
I_{zz} &= \int (x^2+y^2)\, dm, \\
I_{yx} &= I_{xy} = \int xydm, \\
I_{zx} &= I_{xz} = \int xzdm, \\
I_{zy} &= I_{yz} = \int yzdm.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
I &= s_x^2 I_{xx} + s_y^2 I_{yy} + s_z^2 I_{zz} - 2s_x s_y I_{xy} - 2s_x s_z I_{xz} - 2s_y s_z I_{yz} = \\
&= I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cdot\cos\beta - \\
&- 2I_{xz}\cos\alpha\cdot\cos\gamma - 2I_{yz}\cos\beta\cdot\cos\gamma.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Соотношение (11) представляет собой момент инерции твердого тела относительно произвольной оси, направляющие косинусы которой равны $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$. В этом соотношении I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – моменты инерции относительно координатных осей OX, OY, OZ соответственно, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} – центробежные моменты инерции.

Совокупность девяти величин:

$$
\begin{vmatrix}
I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\
-I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\
-I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz}
\end{vmatrix}
$$

представляет собой тензор инерции тела относительно точки O. I_{xx}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yx}, I_{yy}, I_{yz}, I_{zx}, I_{zy}, I_{zz} – компоненты тензора инерции.

Так как $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{yz} = I_{zy}$, то тензор инерции является симметричным и полностью определяется шестью компонентами.

Если известны шесть компонентов тензора инерции, то по формуле (11) можно рассчитать момент инерции твердого тела относительно произвольной оси.

Введем понятие *эллипсоида инерции тела относительно точки O*. Для этого через начало координат проведем оси вращения в произвольных направлениях и на каждой из них отложим отрезки длиной $r = \frac{1}{\sqrt{I}}$, где I –

момент инерции твердого тела относительно данной оси вращения. Концы этих отрезков расположатся на некоторой поверхности. Чтобы найти её уравнение, учтем, что радиус-вектор точек этой поверхности равен

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{I}},$$

$$x = \frac{s_x}{\sqrt{I}},\ y = \frac{s_y}{\sqrt{I}},\ z = \frac{s_z}{\sqrt{I}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} s_x &= x\cdot\sqrt{I}, \\ s_y &= y\cdot\sqrt{I}, \\ s_z &= z\cdot\sqrt{I}. \end{aligned} \qquad (12)$$

Подставив выражения для s_x, s_y, s_z из (12) в уравнение (11), получим

$$I = x^2 I\cdot I_{xx} + y^2 I\cdot I_{yy} + z^2 I\cdot I_{zz} - 2xyI\cdot I_{xy} - 2xzI\cdot I_{xz} - 2yzI\cdot I_{yz}. \qquad (13)$$

Сократив левую и правую часть на I, получим

$$x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} - 2xyI_{xy} - 2xzI_{xz} - 2yzI_{yz} = 1. \qquad (14)$$

Полученное выражение является уравнением *эллипсоида инерции тела относительно точки О*. Эллипсоид инерции представляет собой поверхность, характеризующую распределение моментов инерции тела относительно пучка осей, проходящих через фиксированную точку O. Зная эллипсоид инерции для точки O, можно найти момент инерции относительно любой оси OA, проходящей через эту точку из соотношения

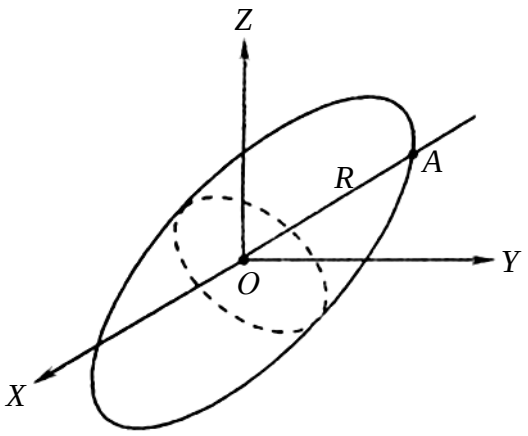

Рис. 2

$$I = \frac{1}{R^2},$$

измерив в соответствующем масштабе расстояние $R = OA$ (рис. 2).

Для каждой связанной с телом точки можно построить свой эллипсоид инерции. Эллипсоид инерции, построенный для центра масс тела, называется центральным.

Тензор инерции зависит от выбора начала координат и направления координатных осей. Если координатные оси направить вдоль главных осей эллипсоида инерции, то в этой системе координат в уравнении (14) пропадут члены, содержащие произведения координат, так как

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0,$$

и уравнение будет иметь вид

$$I_{xx}\cdot x^2 + I_{yy}\cdot y^2 + I_{zz}\cdot z^2 = 1. \qquad (15)$$

В этом случае тензор инерции будет диагональным, а именно

$$\begin{vmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, для твердого тела, независимо от выбора начала координат, существуют три взаимно перпендикулярные оси, совпадающие с главными осями эллипсоида инерции тела относительно точки O, для которых моменты инерции I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}, I_{yx}, I_{zx}, I_{zy} обращаются в нули. Эти оси называют также *главными осями тензора инерции*, которые жестко связаны с телом, как и эллипсоид инерции.

Главные оси центрального эллипсоида инерции (начало отсчета O помещено в центр масс тела) называют *главными осями тела*.

Таким образом, если оси системы координат X, Y, Z совпадают с главными осями тела, а начало координат O находится в его центре масс, то момент инерции тела I относительно произвольной оси OA определится соотношением

$$I = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma, \qquad (16)$$

где I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – моменты инерции относительно главных осей тела; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы.

Следовательно, для вычисления момента инерции I относительно произвольной оси OA необходимо определить главные оси тела и найти моменты инерции I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} относительно этих осей.

Направление главных осей для однородных тел правильной геометрической формы можно определить, пользуясь соображениями симметрии. Так, главные оси однородного куба и однородного прямоугольного параллелепипеда проходят через геометрический центр и параллельны их ребрам (рис. 3, *а*, *б*).

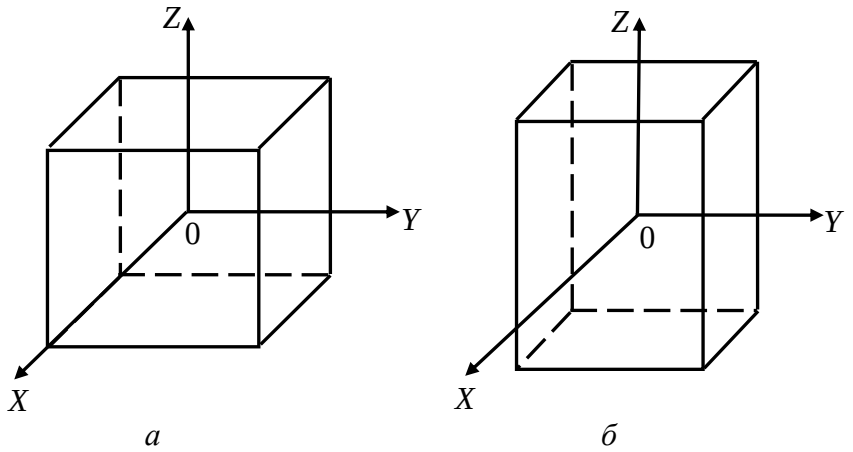

Рис. 3. Главные оси: *а* –однородного куба;
б –однородного параллелепипеда

Если тело, например цилиндр, обладает симметрией вращения вокруг неподвижной оси, то его эллипсоид инерции обладает такой же симметрией. В этом случае одной из *главных осей* тела является его *ось симметрии*. Всякая прямая, проведенная перпендикулярно к ней, также будет главной осью тела (рис. 4).

Для шара эллипсоиды инерции относительно любой оси, проходящей через его центр, одинаковы, и любая ось будет главной осью тела (рис. 5).

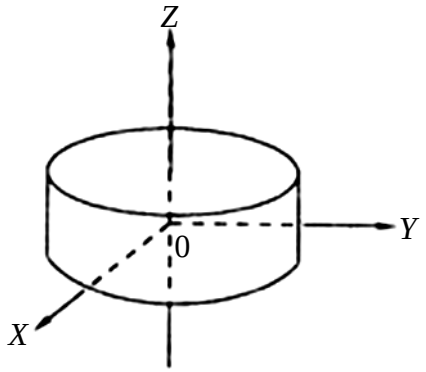

Рис. 4. Ось симметрии *Z* цилиндра – одна из его главных осей

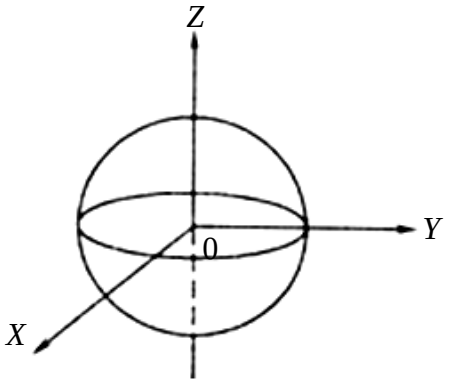

Рис. 5. Оси симметрии шара:
X, *Y*, Z –главные оси

Так, например, эллипсоид инерции однородного куба, в центре которого находится начало координат, вырождается в сферу. В динамическом отношении однородный куб ведет себя точно так же, как однородный шар.

Расчеты показывают, что при вращении твердого тела вокруг закрепленной оси, проходящей через неподвижные подшипники, последние не будут оказывать действия на это тело только в том случае, если вращение происходит вокруг одной из *главных осей тела*. В связи с этим главные оси тела, совпадающие по определению с главными осями *центрального эллипсоида инерции*, называются еще *свободными осями*.

Для того чтобы показать, что тело, вращающееся вокруг закрепленной оси, проходящей через неподвижные подшипники, не будет испытывать воздействия со стороны последних, если ось вращения совпадает с од-

ной из главных осей, найдем выражения для оси и момента сил, действующих со стороны подшипников, если ось вращения *не совпадает* с главной осью тела. Предположим, что силы, действующие со стороны подшипников, являются единственными силами, действующими на тело. По теории о движении центра масс равнодействующая этих сил

$$\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r}_c,$$

где $\mathbf{r}_c$ – радиус-вектор центра масс, проведенный от оси вращения перпендикулярно к ней.

На элементарную массу действует момент внешних сил:

$$d\mathbf{M} = [\mathbf{r}d\mathbf{F}] = -[\mathbf{r}\, dm\omega^2\mathbf{r}_\perp]. \qquad (17)$$

Тогда момент, действующий на всё тело

$$\mathbf{M} = \int d\mathbf{M} = -\int[\mathbf{r}\omega^2\mathbf{r}_\perp]dm. \qquad (18)$$

Как видно из рис. 6,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{||} + \mathbf{r}_\perp. \qquad (19)$$

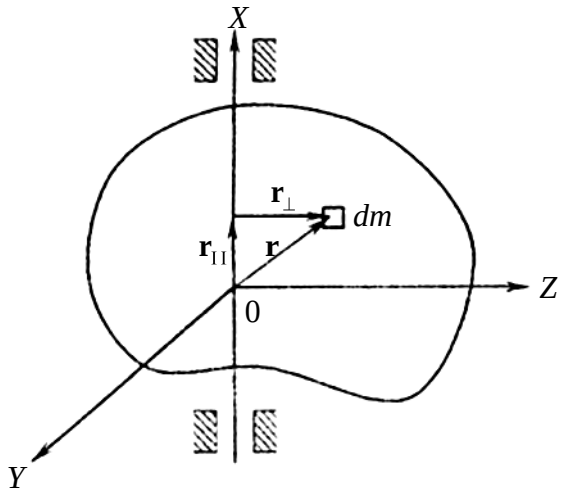

Рис. 6

Подставляя (19) в (18), получим

$$\mathbf{M} = -\omega^2\int[(\mathbf{r}_{||} + \mathbf{r}_\perp)\mathbf{r}_\perp dm = -\omega^2\int[\mathbf{r}_{||}\mathbf{r}_\perp]dm - \omega^2\int[\mathbf{r}_\perp\mathbf{r}_\perp]dm. \qquad (20)$$

Так как $\mathbf{r}_\perp \uparrow\uparrow \mathbf{r}_\perp$, то $[\mathbf{r}_\perp\mathbf{r}_\perp] = 0$, и

$$\mathbf{M} = \omega^2\int[\mathbf{r}_\perp\mathbf{r}_{||}]dm. \qquad (21)$$

В связи с тем, что ось вращения совпадает с осью X,

$$\mathbf{r}_{||} = x\mathbf{i}, \qquad (22)$$

$$\mathbf{r}_{\perp} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Если подставим (22) в (21), получим

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \omega^2\int[x\mathbf{i}(y\mathbf{j} + z\mathbf{k})]dm = \omega^2\int\{[xy\mathbf{ij}] + [xz\mathbf{ik}]\}dm = \\ &= \omega^2\int xy\mathbf{k}dm - \omega^2\int xz\mathbf{j}dm = \omega^2\mathbf{k}\int xydm - \omega^2\mathbf{j}\int xzdm.\end{aligned} \tag{23}$$

Подставляя в (23) $I_{xy} = \int xydm$ и $I_{xz} = \int xzdm$, получим

$$\mathbf{M} = \omega^2 I_{xy}\mathbf{k} - \omega^2 I_{xz}\mathbf{j}. \tag{24}$$

Таким образом, чтобы подшипники не действовали на ось и на вращающееся тело, необходимо, чтобы $r_c = 0$ и $I_{xy} = I_{xz} = 0$, так как только в этом случае сила и момент силы относительно точки равны нулю ($F = 0$ и $M = 0$). Это означает, что ось вращения должна проходить через центр масс тела и совпадать с одной из главных его осей, для которой центробежные моменты инерции равны нулю ($I_{xy} = I_{xz} = 0$).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЁРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОСИ

Оборудование

Установка «Крутильный маятник FPM-05» (рис. 1).

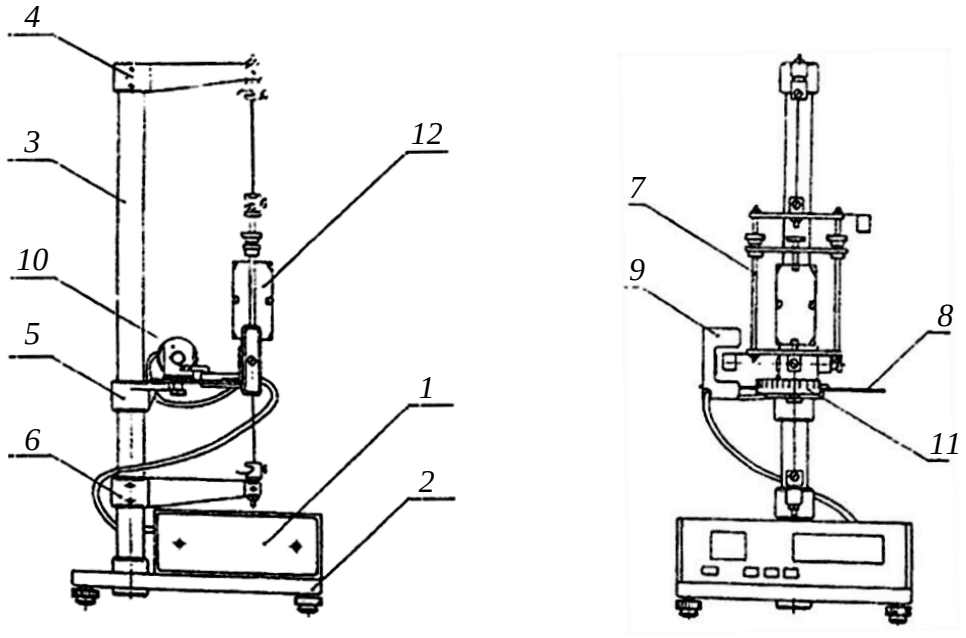

Рис. 1. Крутильный маятник FPM-05

Описание установки

К основанию *2*, оснащенному четырьмя ножками с регулируемой высотой, прикреплен миллисекундомер *1*. В основании закреплена колонка *3*, на которой при помощи прижимных винтов крепятся кронштейны *4*, *5*, *6*. Кронштейны *4* и *6* имеют зажимы, служащие для закрепления стальной проволоки, на которой подвешена рамка *7*. На кронштейне *5* закреплена стальная плита *8*, которая служит основанием фотоэлектрическому датчику *9*, электромагниту *10* и угловой шкале *11*. Положение электромагнита 10 на плите 8 можно изменять. Это положение относительно фотоэлектрического датчика показывает на шкале стрелка, прикрепленная к электромагниту.

Конструкция рамки *7* позволяет закреплять исследуемые твердые тела (цилиндр, параллелепипед) *12*, значительно отличающиеся друг от друга по размерам. Тела крепятся при помощи подвижной балки, которая перемещается по направляющим между неподвижными балками. Балка устанавливается путем затягивания гаек на втулках, помещенных на подвижной балке.

Фотоэлектрический датчик и электромагнит соединены с миллисекундомером при помощи разъема.

Вывод рабочей формулы

Исследуемое твердое тело закрепляют в рамке крутильного маятника, подвешенной на упругой вертикально натянутой проволоке (см. рис. 1). Крутильный маятник выводят из положения равновесия и наблюдают за его колебаниями. При отклонении маятника на некоторый угол φ от положения равновесия на него со стороны нити действует упругий момент:

$$M = -D \cdot \varphi, \tag{1}$$

где φ – угол отклонения маятника от положения равновесия; D – постоянная, характеризующая упругие свойства проволоки.

Опыт показывает, что если проволока достаточно тонкая и длинная, то зависимость (1) справедлива и для больших углов отклонения φ. Затухание крутильного маятника обычно невелико.

Движение крутильного маятника определяется соотношением

$$I_{\text{М}} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M, \tag{2}$$

где I_M – момент инерции маятника относительно оси вращения; $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ – его угловое ускорение; M – момент сил, действующих на маятник.

Подставляя в формулу (2) соотношение (1), получим

$$I_{\text{М}} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi.$$

Перенося все члены в левую часть, будем иметь

$$I_{\text{М}} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + D\varphi = 0$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{I_{\text{М}}}\varphi = 0. \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение (3) – стандартное уравнение гармонических колебаний, в котором коэффициент при φ – квадрат угловой частоты:

$$\omega^2 = \frac{D}{I_M},$$

отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I_M}}.$$

Связь между периодом T крутильных колебаний и угловой частотой ω определяется соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Тогда

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_M}{D}}. \qquad (4)$$

Итак, период колебания крутильного маятника связан с его моментом инерции соотношением (4). Измеряя период крутильных колебаний, мы можем определить момент инерции крутильного маятника I_M, если известна постоянная D.

Момент инерции крутильного маятника I_M равен сумме моментов инерции свободной рамки I_0 и тела I, закрепленного в этой рамке:

$$I_M = I_0 + I. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в формулу(4), получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I}{D}}. \qquad (6)$$

Если колеблется свободная рамка (без тела), то её период колебаний

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}. \qquad (7)$$

Исключая из системы уравнений (6) и (7) неизвестную величину D, получим формулу для момента инерции тела относительно произвольной оси:

$$I = I_0\frac{T^2 - T_0^2}{T_0^2}. \qquad (8)$$

Для определения момента инерции I_0 свободной рамки в ней укрепляют эталонное тело, момент инерции $I_э$ которого известен. Тогда из системы уравнений (6) и (7) получим

$$I_0 = I_э\frac{T_0^2}{T_э^2 - T_0^2}, \qquad (9)$$

где $T_э$ – период колебаний рамки с эталонным телом.

В качестве эталонного тела в работе используют цилиндр массой m и радиусом R (рис. 2), мо-

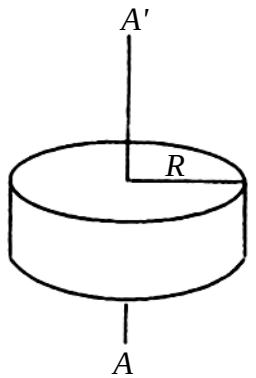

Рис. 2

мент инерции $I_э$ которого относительно оси AA', перпендикулярной к основанию цилиндра, равен

$$I_э = \frac{1}{2} mR^2. \qquad (10)$$

Измеряя периоды $T_э$ и T_0 и подставляя значение $I_э$, рассчитанное по формуле (10), в соотношение (9), вычислим момент инерции I_0 свободной рамки.

В лабораторной установке ось маятника, совпадающая с осью, относительно которой происходят колебания тела, вертикальна

Поэтому во всех опытах необходимо считать, что единичный вектор **s** оси, относительно которой определяется момент инерции I тела, направлен вертикально вверх. Момент инерции тела относительно вертикальной оси изменяют, поворачивая тело и закрепляя его в различных положениях по отношению к этой оси. Оси системы координат направляем вдоль *главных осей тела.* Начало O системы координат находится в центре масс тела. Поворачивая тело, можно изменять направление вектора **s** (направление оси вращения) относительно жестко связанной с телом системы координат. В качестве исследуемого тела в работе используется прямоугольный параллелепипед, изготовленный из однородного материала. На рис. 3 показана система координат XYZ, жестко связанная с телом, с началом O в центре масс параллелепипеда (a, b, c – длины рёбер параллелепипеда), а также оси, относительно которых можно определить его моменты инерции I в данной работе.

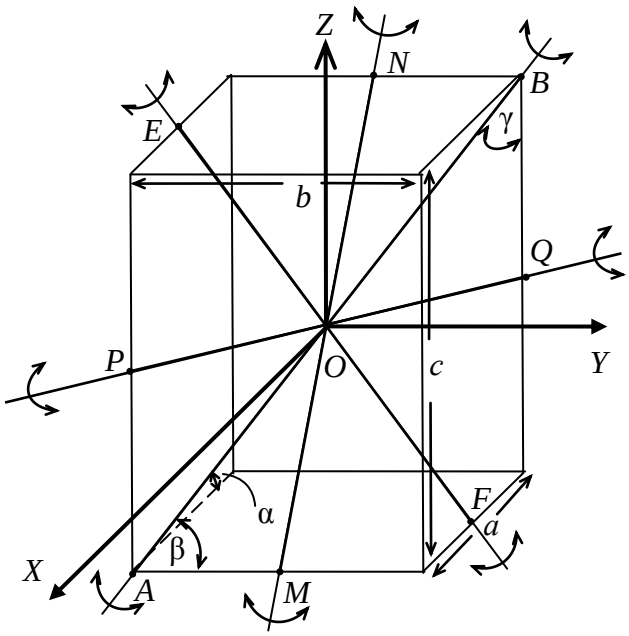

Рис. 3

Порядок выполнения работы

Порядок проведения измерения периода колебаний крутильного маятника приведен в приложении.

1. Убедиться, что колебания крутильного маятника являются слабо затухающими, для этого маятник вывести из положения равновесия и определить число колебаний N, за которое их амплитуда уменьшается в 2–3 раза. Если $N \geq 10$, то затухание невелико. Измерения провести для свободной рамки и для тела, закрепленного в рамке.

2. Определить период T_0 колебаний свободной рамки по формуле

$$T_0 = \frac{t_0}{n},$$

где t_0 – время колебаний свободной рамки; n – количество периодов колебаний.

3. Закрепить в рамке цилиндр таким образом, чтобы вертикальная ось вращения была перпендикулярна его основанию. Определить период колебаний $T_э$ системы «свободная рамка–цилиндр» по формуле

$$T_э = \frac{t_э}{n_1},$$

где $t_э$ – время колебаний системы «свободная рамка–цилиндр»; n_1 – количество периодов колебаний.

4. Рассчитать момент инерции $I_э$ эталонного цилиндра по формуле (10).

5. Определить момент инерции I_0 свободной рамки, подставляя величины T_0, $T_э$ и $I_э$ в формулу (9). Результаты измерений занести в табл. 1.

Таблица 1

№	t_0, с	n	T_0, с	m, кг	R, м	$I_э$, кг·м^2	$t_э$, с	n_1	$T_э$, с	I_0, кг·м^2	$I_{0\ ср}$, кг·м^2
1											
2											
3											

6. Закрепить параллелепипед в рамке таким образом, чтобы его главная ось, совпадающая с осью X системы координат, была направлена вертикально, т. е. совпадала с осью вращения. Определить период колебаний системы T_x по формуле

$$T_x = \frac{t_x}{n_2},$$

где t_x – время n_2 периодов колебаний. Вычислить момент инерции I_{xx} прямоугольного параллелепипеда относительно главной оси, совпадающей с осью OX, подставляя в формулу (8) значения периода колебаний T_0 свободной рамки, определенного в п. 2, периода T_x колебаний системы и момент инерции I_0 свободной рамки относительно оси вращения.

Аналогичные измерения провести для 2-х других главных осей Y и Z и вычислить моменты инерции I_{yy} и I_{zz}.

Результаты занести в табл. 2.

Таблица 2

№	t_x, с	n_2	T_x, с	I_{xx}, кг·м^2	t_y, с	n_3	T_y, с	I_{yy}, кг·м^2	t_z, с	n_4	T_z, с	I_{zz}, кг·м^2
1												
2												
3												

7. Закрепить параллелепипед в рамке так, чтобы ось вращения совпала с осью *AB* (см. рис. 3). Определить период колебаний T_{AB} системы по формуле

$$T_{AB} = \frac{t_{AB}}{n_5},$$

где t_{AB} – время n_5 периодов колебаний. Подставляя в формулу (8) значения I_0, T_{AB} и T_0, определить момент инерции I_{AB} относительно оси вращения, совпадающей с главной диагональю параллелепипеда. Результаты занести в табл. 3.

Таблица 3

№	t_{AB}, с	n_5	T_{AB}, с	I_{AB}, кг·м^2	$I_{AB\ ср}$, кг·м^2
1					
2					
3					

8. Рассчитать направляющие косинусы оси *AB* по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

где *a*, *b* и *c* – длины рёбер прямоугольного параллелепипеда (см. рис. 3).

9. Теоретическое значение момента инерции $I_{AB\ теор}$ прямоугольного параллелепипеда относительно оси вращения, совпадающей с диагональю *AB*, вычислить по формуле:

$$I_{AB} = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma = I_{xx}\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + I_{yy}\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} + I_{zz}\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2},$$

где I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – моменты инерции относительно главных осей параллелепипеда, определенные в п. 6. Результаты занести в табл. 4.

Таблица 4

№	*a*, м	$a_{ср}$, м	*b*, м	$b_{ср}$, м	c, м	$c_{ср}$, м	$\cos\alpha_{AB}$	$\cos\beta_{AB}$	$\cos\gamma_{AB}$	$I_{AB\ теор}$, кг·м^2
1										
2										
3										

10. Вычислить ошибку метода экспериментального определения момента инерции I_{AB} по формуле:

$$\left|\frac{\Delta I_{AB}}{I_{AB}}\right| = \left|\frac{\Delta I_0}{I_0}\right| + \left|\Delta T_{AB}\left(\frac{2T_{AB}}{T_{AB}^2 - T_0^2}\right)\right| + \left|\Delta T_0\left(\frac{2T_0}{T_{AB}^2 - T_0^2} - \frac{2}{T_0}\right)\right|,$$

где ΔI_{AB}, ΔI_0, ΔT_{AB}, ΔT_0 – абсолютные ошибки соответствующих величин.

11. Определить абсолютную погрешность ΔI_{AB}:

$$\Delta I_{AB} = \left|\frac{\Delta I_{AB}}{I_{AB}}\right| I_{AB\,\text{ср}}.$$

12. Представить окончательный результат в виде:

$$I_{AB} = I_{AB\,\text{ср}} \pm \Delta I_{AB},$$

где $I_{AB\,\text{ср}}$ – среднее значение момента инерции относительно оси AB.

13. Убедиться в том, что теоретическое значение момента инерции $I_{AB\,\text{теор}}$ попадает в интервал изменения I_{AB} (рис. 4).

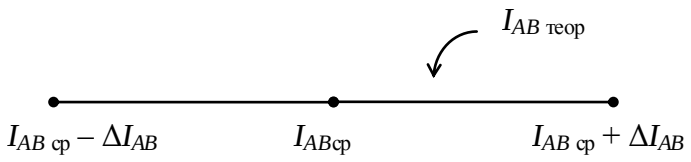

Рис. 4

14. Провести аналогичные измерения и расчеты для осей вращения, совпадающих с прямыми MN, EF, PQ (см. рис. 3).

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте понятия момента инерции материальной точки и момента инерции твердого тела относительно оси вращения.

2. В чем заключается физический смысл момента инерции?

3. Почему инерционные свойства твердого тела по отношению к вращательному движению характеризуют моментом инерции, а не массой тела?

4. Получите выражение момента инерции твердого тела относительно произвольной оси.

5. Как построить эллипсоид инерции? Что такое центральный эллипсоид инерции?

6. Дайте понятие свободных осей твердого тела.

7. Как направлены свободные оси прямоугольного параллелепипеда, куба, цилиндра?

8. Напишите выражение момента инерции твердого тела относительно произвольной оси, если оси координат направить вдоль свободных осей твердого тела.

9. Рассчитайте момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через его центр масс, перпендикулярно к основанию цилиндра.

10. Получите формулу для расчета периода колебаний крутильного маятника.

11. Получите рабочую формулу для определения момента инерции методом крутильных колебаний.

12. Рассчитайте направляющие косинусы диагональной оси *AB* прямоугольного однородного параллелепипеда.

13. Получите формулу для расчета ошибки метода в данной работе.

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие : в 5 т. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. § 53. С. 311–315.

2. Стрелков, С. П. Механика / С. П. Стрелков. 4-е изд. СПб. : Лань, 2005. 559 с.

3. Обработка результатов измерений в физическом практикуме : учеб.-метод. пособие для студентов физического и других естественных факультетов / сост. : В. А. Костяков, А. А. Игнатьев, Т. Н. Тихонова, А. В. Ляшенко ; под ред. проф. А. А. Игнатьева. 3-е изд., перераб. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 40 с.

Дополнительная литература

Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. Часть II : Динамика системы материальных точек / Н. Н. Бухгольц. М. : Наука, 1966. § 10, 11. С. 138–143.

Каленков С. Г., Соломако Г. И. Практикум по физике. Механика / С. Г. Каленков, Г. И. Соломако ; под. ред. А. Д. Гладуна. М. : Высшая школа, 1990. Лаб. раб. № 9. С. 95–102.

Физический энциклопедический словарь.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

Оборудование

Установка «Крутильный маятник» (рис. 1), цилиндры (2 шт.), цилиндрики (2 шт.), секундомер, штангенциркуль, разновесы.

Вывод рабочей формулы

Крутильный маятник (см. рис. 1) состоит из прямоугольной пластины *1*, подвешенной к вертикальной рамке *3* тонкой стальной проволокой *2*.

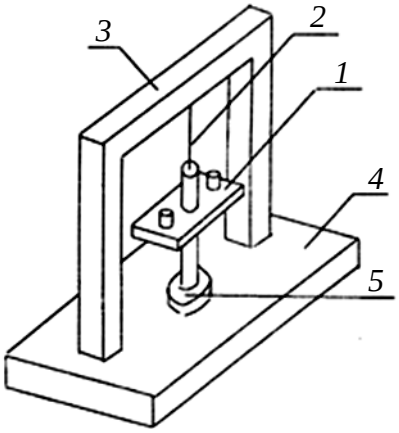

Рис. 1. Крутильный маятник

Прикрепим к пластине *1* крутильного маятника массивное цилиндрическое тело *4* (рис. 1) и определим момент инерции такой системы (в дальнейшем будем ее называть исходной). Данная система за счет упругих сил деформации, возникающих в проволоке при ее закручивании, может колебаться в горизонтальной плоскости.

При повороте системы на малый угол α в стальной проволоке возникает раскручивающий момент M, который в пределах малых отклонений пропорционален углу α согласно закону Гука:

$$M = D\alpha, \qquad (1)$$

где D – раскручивающий момент на единицу угла кручения.

Если системе предоставить возможность колебаться, то она будет совершать гармоническое колебательное движение по закону:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t,,$$

где α_0 – максимальный угол отклонения (амплитуда колебаний), T – период колебания.

Угловая скорость движения выражается формулой:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi\alpha_0}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t = \omega_0\cos\frac{2\pi}{T}t,$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi\alpha_0}{T}$ при $t = 0, \frac{T}{2}, 2\frac{T}{2}, \ldots$ – т. е. в момент прохождения системой положения равновесия.

Кинетическая энергия при прохождении маятником положения равновесия запишется следующим образом

$$E_{\text{к}} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{2\pi^2\alpha_0^2}{T}\cdot I, \tag{2}$$

где I – момент инерции системы.

Эта энергия должна равняться потенциальной энергии системы при ее максимальном отклонении от положения равновесия.

Потенциальную энергию определим, используя выражение (1):

$$E_{\text{р}} = \int_0^{\alpha_0} M\mathrm{d}\alpha = \int_0^{\alpha_0} D\alpha\mathrm{d}\alpha = \frac{D\alpha_0^2}{2}.$$

Из условия $E_{\text{к}} = E_{\text{р}}$ можно определить период колебания системы:

$$T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{I}{D}}. \tag{3}$$

Установим теперь на пластине *1* с обеих сторон на равных расстояниях r от оси вращения одинаковые цилиндрики с массой m.

Момент инерции системы изменится:

$$I_1 = I + 2I_2,$$

где I_2 – момент инерции одного цилиндрика относительно оси вращения системы. I_2 можно определить по теореме Штейнера-Гюйгенса:

$$I_2 = \frac{1}{2}m\cdot r_0^2 + m\cdot r^2,$$

где r_0– радиус добавленных цилиндриков.

Таким образом, период колебаний новой системы будет иметь вид:

$$T_1 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{I + 2\left(\frac{1}{2}m\cdot r_0^2 + m\cdot r^2\right)}{D}}. \tag{4}$$

Решая систему уравнений (3), (4) относительно неизвестной величины I, найдем:

$$I = 2m(r^2 + \frac{r_0^2}{2}) \cdot \frac{T^2}{T_1^2 - T^2}$$

При выполнении работы удобно иметь дело не с величинами r_0 и r, а с диаметрами цилиндриков d_0 и расстояниями L между ними.

Учитывая, что $r_0 = \frac{d}{2}$ и $r = \frac{L}{2}$, получим рабочую формулу:

$$I = \frac{m}{2} \cdot (L^2 + \frac{d_0^2}{2}) \cdot \frac{T^2}{T_1^2 - T^2} \ . \qquad (5)$$

Порядок выполнения работы

1. Определение момента инерции исходной системы I_0.

1.1. Установить цилиндр *4*, как показано на рис. 1.

1.2. Отклонить пластину *1* от положения равновесия на 10–15 градусов и предоставить системе возможность свободно колебаться.

1.3. После установления устойчивых колебаний системы в горизонтальной плоскости измерить время t не менее $N = 20$ полных колебаний.

1.4. Вычислить период колебаний $T = \frac{t}{N}$.

1.5. Установить на пластине *1* симметрично дополнительные цилиндрики и вновь определить период колебания T_1 системы с цилиндриками.

1.6. Измерить расстояние между цилиндриками L и диаметры цилиндриков d_0, измерить массы цилиндриков m.

1.7. Вычислить значение постоянного множителя K в рабочей формуле (5), где

$$K = \frac{m}{2} \cdot \left(L^2 + \frac{d_0^2}{2} \right).$$

1.8. Вычислить момент инерции системы I_0. по формуле (5).

1.9. Результаты измерений и вычислений свести в табл. 1, где $\bar{I}_0$ – среднее значение момента инерции.

Таблица 1

№ опыта	t, с	N	T, с	$\bar{T}$, с	t_1, с	N_1	T_1 с	$\bar{T}_1$, с	$\bar{I}_0$, кг·м^2
1									
2									
3									

2. Определение момента инерции системы I, нагруженной исследуемым телом цилиндрической формы.

2.1. Соосно с цилиндром *4* установить второй цилиндр – исследуемое тело.

2.2. Повторить пункты 1.2–1.5 и вычислить по формуле (5) момент инерции системы с телом – *I*.

2.3. Результаты измерений и вычислений свести в табл. 2.

Таблица 2

№ опыта	t, с	N	T, с	$\overline{T}$, с	t_1, с	N_1	T_1, с	$\overline{T}_1$, с	$\overline{I}$, кг·м^2
1									
2									
3									

3. Экспериментальное определение момента инерции исследуемого тела – цилиндра – $I_ц$ проводится по формуле:

$$\overline{I}_ц = \overline{I} - \overline{I}_0. \qquad (6)$$

Значения I и I_0 взять из таблиц 1 и 2.

4. Теоретическое определение момента инерции исследуемого тела – цилиндра.

Момент инерции цилиндра относительно его геометрической оси $I'_ц$ определяется по формуле:

$$I'_ц = \frac{m_ц R^2}{2}, \qquad (7)$$

где R – радиус цилиндра; $m_ц$ – масса цилиндра, которую необходимо измерить на технических весах.

5. Вычислить погрешность экспериментального определения момента инерции цилиндра (6) относительно теоретического значения (7):

$$\frac{\left|I'_ц - \overline{I}_ц\right|}{I'_ц} \cdot 100\,\% = \frac{\left|\Delta\overline{I}_ц\right|}{I'_ц} \cdot 100\,\%.$$

6. Записать окончательный результат экспериментального определения момента инерции цилиндра с учетом рассчитанной погрешности в виде:

$$I_ц = \overline{I}_ц \pm \Delta\overline{I}_ц.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется моментом инерции тела? Объясните физический смысл этого понятия.

2. Сформулируйте и докажите теорему Штейнера-Гюйгенса.

3. Каково назначение в данной установке дополнительных цилиндриков? Можно ли провести определение момента инерции без них? Какую величину необходимо знать в этом случае?

4. При каких упрощающих предположениях получена рабочая формула?

5. Как оценить точность измерения момента инерции тела данным методом?

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие : в 5 т. Т. 1. Механика / Сивухин Д. В. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. § 33, 35, 36 (пп. 1, 7).

2. Обработка результатов измерений в физическом практикуме : учеб.-метод. пособие для студентов физического и других естественных факультетов / сост. : В. А. Костяков, А. А. Игнатьев, Т. Н. Тихонова, А. В. Ляшенко ; под ред. проф. А. А. Игнатьева. 3-е изд., перераб. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 40 с.

Дополнительная литература

Савельев, И. В. Курс общей физики : учеб. пособие для втузов : в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика / Савельев И. В. СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008. 432 с.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ ТРИФИЛЯРНОГО ПОДВЕСА

Оборудование:

Установка «Трифилярный подвес», грузы в виде дисков (2 шт.), секундомер, штангенциркуль, разновесы.

Вывод рабочей формулы

Установка «Трифилярный подвес» (рис. 1) включает круглую платформу *1* радиусом *R*, подвешенную на длинных неупругих нитях к диску *2* радиусом *r*.

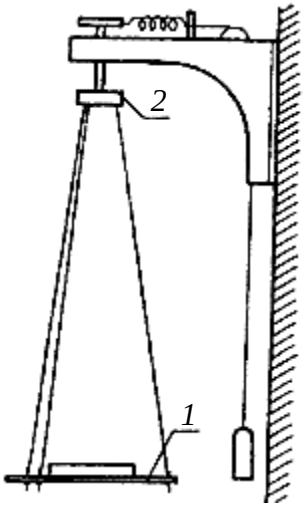

Рис. 1

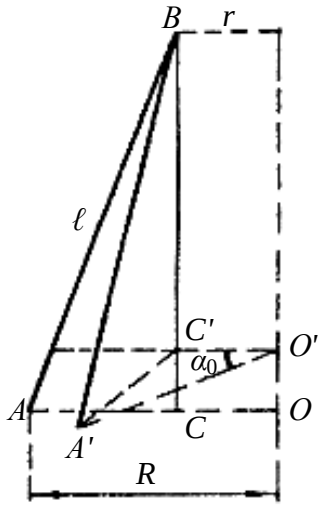

Рис. 2

Платформа может совершать малые колебания в горизонтальной плоскости относительно вертикальной оси, проходящей через ее центр тяжести. Колебательное движение платформы сопровождается ее периодическим движением и по вертикали с некоторой амплитудой (за счет кручения нитей), но для малых отклонений можно пренебречь изменением длины нитей.

При колебаниях, поднимаясь на высоту *h*, платформа массы m приобретает потенциальную энергию:

$$E_p = mgh. \qquad (1)$$

Согласно закону сохранения полной механической энергии в момент прохождения платформой положения равновесия потенциальная энергия полностью превращается в кинетическую энергию (при отсутствии сил трения):

$$E_к = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{2\pi^2\alpha_0^2}{T} \cdot I, \qquad (2)$$

где I – момент инерции; ω – угловая скорость; α_0 – амплитуда колебаний; T – период колебаний.

Из условия равенства максимальных значений потенциальной и кинетической энергий $E_р = E_к$ определим момент инерции системы I:

$$I = \frac{mgh}{2\pi^2\alpha_0^2} \cdot T^2. \qquad (3)$$

Найдем связь между амплитудой колебаний платформы α_0 в горизонтальной плоскости и ее смещением h по вертикали. Рассмотрим рис. 2. Из него следует:

$$h = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}, \qquad (4)$$

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = \ell^2 - (R - r)^2, \qquad (5)$$

$$(BC_1)^2 = (BA_1)^2 - (A_1C_1)^2 = \ell^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha_0). \qquad (6)$$

Таким образом,

$$h = \frac{2Rr(1 - \cos\alpha_0)}{BC + BC_1} = \frac{4Rr\sin^2\frac{\alpha_0}{2}}{BC + BC_1}. \qquad (7)$$

С учетом ограничений, наложенных выше на колебательное движение (малые углы α_0), можно принять

$$\sin^2\frac{\alpha_0}{2} \cong \frac{\alpha_0^2}{4},$$

$$BC + BC_1 \cong 2\ell.$$

Тогда рабочая формула будет иметь вид:

$$I = \frac{mgRr}{4\pi^2\ell} \cdot T^2. \qquad (8)$$

Порядок выполнения работы

1. Измерение момента инерции I_0 ненагруженной платформы.

1.1. Привести с помощью рычажного механизма платформу в колебательное движение в горизонтальной плоскости с амплитудой не более 5–6°.

1.2. Измерить секундомером время t не менее N = 20 полных колебаний платформы.

1.3. Вычислить период T одного полного колебания по формуле:

$$T = \frac{t}{N}.$$

1.4. Вычислить по рабочей формуле (8) значение момента инерции ненагруженной платформы I_0. Значения R, r, ℓ и m приведены на установке.

1.5. Данные измерений занести в табл. 1:

Таблица 1

№ опыта	t, с	N	T, с	$\bar{T}$, с	m, кг	$\bar{I}_0$, кг·м^2
1						
2						
3						

2. Измерение момента инерции I платформы, нагруженной исследуемым телом в виде диска массой $M_д$ и радиусом $R_д$.

2.1. Измерить массу и радиус диска.

2.2. Положить на платформу концентрично с ней исследуемое тело и привести платформу в колебательное движение.

2.3. Повторить п.п. 1.2, 1.3.

2.4. Вычислить по рабочей формуле (8) значение момента инерции нагруженной платформы I (при расчете вместо массы платформы m необходимо подставлять массу $m + M_д$).

2.5. Занести в табл. 2 результаты измерений и вычислений.

Таблица 2

№ опыта	$M_д$, кг	m, кг	t, с	N	T, с	$\bar{T}$, с	$\bar{I}_0$, кг·м^2
1							
2							
3							

3. Определение момента инерции диска относительно его геометрической оси.

3.1. Найти экспериментальное значение момента инерции диска по формуле:

$$\bar{I}_д = \bar{I} - \bar{I}_0. \qquad (9)$$

3.2. Вычислить теоретическое значение момента инерции диска по формуле:

$$I'_{д} = \frac{M_{д} \cdot R_{д}^{2}}{2}. \qquad (10)$$

3.3. Вычислить погрешность экспериментального определения момента инерции диска (9) относительно теоретического значения (10):

$$\frac{\left| I'_{д} - \bar{I}_{д} \right|}{I'_{д}} \cdot 100\% = \frac{\left| \Delta \bar{I}_{д} \right|}{I'_{д}} \cdot 100\%.$$

3.4. Записать окончательный результат экспериментального определения момента инерции диска с учетом рассчитанной погрешности в виде:

$$I_{д} = \bar{I}_{д} \pm \Delta \bar{I}_{д}.$$

4. Проверка теоремы Штейнера-Гюйгенса.

4.1. Положить на платформу симметрично и вплотную друг к другу два одинаковых диска так, чтобы ось вращения платформы проходила вдоль оси симметрии дисков.

4.2. Привести платформу с грузами в колебательное движение.

4.3. Повторить пп. 1.2, 1.3.

4.4. Вычислить по рабочей формуле (8) момент инерции нагруженной платформы I_1 (при подсчете вместо массы платформы m необходимо подставлять массу $m + 2M_{д}$.).

4.5. Занести результаты измерений и вычислений в табл. 3.

Таблица 3

№ опыта	$M_{д}$, кг	m, кг	t, с	N	T, с	$\bar{T}$, с	$\bar{I}_0$, кг·м^2
1							
2							
3							

4.6. Определить значение момента инерции одного диска $I_{д}$ относительно оси вращения платформы по формуле:

$$\bar{I}_{д} = \frac{\overline{I_1} - \overline{I_0}}{2} \qquad (11)$$

4.7. Определить теоретическое значение момента инерции одного диска по формуле Штейнера-Гюйгенса:

$$I'_{д} = \frac{1}{2} M_{д} R_{д}^{2} + M_{д} R_{д}^{2} = \frac{3}{2} M_{д} R_{д}^{2}. \qquad (12)$$

4.8. Вычислить погрешность экспериментального определения момента инерции диска (11) относительно теоретического значения (12):

$$\frac{\left|I_{д}^{'} - \bar{I}_{д}\right|}{I_{д}^{'}} \cdot 100\% = \frac{\left|\Delta\bar{I}_{д}\right|}{I^{'}_{д}} \cdot 100\%.$$

4.9. Записать окончательный результат экспериментального определения момента инерции диска с учетом рассчитанной погрешности в виде:

$$I_{д} = \bar{I}_{д} \pm \Delta\bar{I}_{д}.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется моментом инерции тела? Объясните физический смысл этого понятия.
2. Особенности метода измерения моментов инерции тел с помощью трифилярного подвеса?
3. Сформулируйте и докажите теорему Штейнера-Гюйгенса.
4. Как экспериментально подтвердить справедливость теоремы Штейнера-Гюйгенса.
5. При каких упрощающих предположениях получена рабочая формула?
6. Как оценить точность измерения момента инерции тел данным методом?

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие : в 5 т. Т. 1. Механика / Сивухин Д. В. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. § 33, 35, 36 (пп. 1, 7).

2. Обработка результатов измерений в физическом практикуме : учеб.-метод. пособие для студентов физического и других естественных факультетов / сост. : В. А. Костяков, А. А. Игнатьев, Т. Н. Тихонова, А. В. Ляшенко ; под ред. проф. А. А. Игнатьева. 3-е изд., перераб. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 40 с.

Дополнительная литература

Савельев, И. В. Курс общей физики : учеб. пособие для втузов : в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика / Савельев И. В. СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008. 432 с.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ПРОВЕРКА ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

Оборудование:

Установка «Маятник Обербека», штангенциркуль, набор грузов, разновесы, линейка.

Вывод рабочей формулы

Экспериментальная установка (рис. 1) представляет собой стойку *1* с нанесенной миллиметровой шкалой. К стойке крепится маятник Обербека *2*. На оси маятника укреплены два вала различных радиусов R_1 и R_2 и крестовина, вдоль стержней которой могут перемещаться грузы в виде дисков массой $m_д$. Грузы можно закреплять в заданных положениях, меняя момент инерции системы. На вал намотана нить, которая перекинута через вспомогательный блок малой массы, закрепленный на стойке установки. К свободному концу нити крепится тело массой m, приводящее при своем падении вал с крестовиной во вращение.

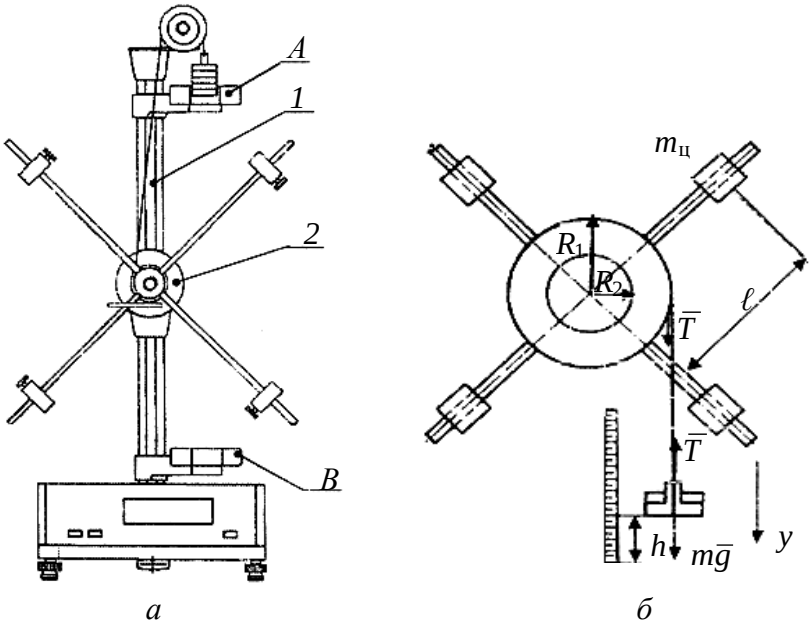

Рис. 1. Схема экспериментальной установки:
а – общий вид; *б* – маятник Обербека

На стойке установлены ограничители *A* и *B*, фиксирующие начальное и конечное положения падающего груза массой *m*. Ограничитель *A* свободно перемещается вдоль стойки. Время *t* прохождения телом массы *m* пути *h* измеряется электронным секундомером, включение и выключение которо-

го происходит автоматически с помощью фотоэлементов, вмонтированных в ограничителях A и B.

Уравнение динамики вращательного движения записывается в виде

$$M = I\frac{d\omega}{dt}, \tag{1}$$

где M – момент силы; I – момент инерции системы; $\frac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение.

Вращение системы обусловлено моментом силы натяжения нити:

$$M = R \cdot T, \tag{2}$$

где R – радиус вала; T – сила натяжения нити.

Движение падающего с ускорением a тела массой m описывается следующим уравнением движения в скалярной форме:

$$mg - T = ma, \tag{3}$$

Из (3) выразим T и умножим обе части на R:

$$T \cdot R = m(g - a) \cdot R. \tag{4}$$

Из соотношений (2) и (4) выразим момент силы M и подставим в уравнение (1):

$$m(g - a)R = I\frac{d\omega}{dt}. \tag{5}$$

Уравнение, связывающее линейное ускорение a и угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$ имеет вид:

$$a = R\frac{d\omega}{dt}. \tag{6}$$

Ускорение a можно определить из кинематического соотношения:

$$a = \frac{2h}{t^2}, \tag{7}$$

где t – время падения тела.

Подставляя в уравнение (5) выражения (6) и (7), получим рабочую формулу для определения момента инерции тела:

$$\frac{mR^2(gt^2 - 2h)}{2h} = I. \tag{8}$$

Упражнение 1

Проверка основного уравнения вращательного движения

Проверить основное уравнение (1) динамики вращательного движения можно двумя путями:

1) при постоянном моменте инерции системы и изменяющемся моменте силы натяжения нити;

2) при постоянном моменте силы натяжения нити и изменяющемся моменте инерции системы.

Момент силы натяжения нити меняется за счет изменения либо массы m падающего груза, либо радиуса R вала. Таким образом, при использовании падающих грузов разной массы и валов различных радиусов экспериментальной проверке подлежит соотношение:

$$m_1 R_1^2 (g t_1^2 - 2h) = m_2 R_2^2 (g t_2^2 - 2h). \qquad (9)$$

Чтобы проверить основное уравнение динамики вращательного движения вторым способом, рассмотрим за счет чего можно изменить момент инерции вращающейся системы.

Момент инерции I вращающейся системы в соответствии с теоремой Штейнера–Гюйгенса равен:

$$I = I_0 + I_0' + 4 m_д \ell^2. \qquad (10)$$

где I_0 – момент инерции вала с крестовиной без дисков; I_0' – момент инерции закрепленных на крестовине четырех цилиндров относительно поперечной оси, совпадающей с одним из диаметров дисков и перпендикулярной к оси крестовины; $m_д$ – масса диска; ℓ – расстояние вдоль стержня крестовины от оси вращения до торцевой поверхности диска.

Для исключения из измерений величин I_0 и I_0' можно определить разность моментов инерции системы при различных положениях дисков на стержнях крестовины:

$$I_1 - I_2 = 4 m_д (\ell_1^2 - \ell_2^2), \qquad (11)$$

если $\ell_1 > \ell_2$.

Изменение момент инерции системы при постоянном моменте силы натяжения приводит к изменению ускорения, то есть изменению времени t падения груза массой m. Для двух различных моментов инерции уравнение (8) запишется следующим образом:

$$\frac{mR^2 (g t_1^2 - 2h)}{2h} = I_1,$$

$$\frac{mR^2 (g t_2^2 - 2h)}{2h} = I_2. \qquad (12)$$

Подставив в соотношение (11) выражения из (12), получим:

$$4m_{д}(\ell_1^2 - \ell_2^2) = \frac{mR^2 g}{2h}(t_1^2 - t_2^2) \qquad (13)$$

или

$$\frac{(t_1^2 - t_2^2)\cdot mR^2 g}{8hm_{д}(\ell_1^2 - \ell_2^2)} = const\,. \qquad (14)$$

Из (14) для различных пар расстояний (ℓ_1 и ℓ_2, ℓ_1 и ℓ_3) от оси вращения вдоль стержней крестовины, на которых расположены диски следует:

$$\frac{t_1^2 - t_2^2}{\ell_1^2 - \ell_2^2} = \frac{t_1^2 - t_3^2}{\ell_1^2 - \ell_3^2} = const. \qquad (15)$$

Выражение (15) подлежит проверке.

Порядок выполнения работы

1. Определить массу подвешиваемого груза m_0, при которой маятник начнет вращаться. Дальнейшие измерения проводить с грузами массой $m > m_0$.
2. Определить на технических весах массы грузов m, при своем падении приводящие систему во вращательное движение.
3. Измерить штангенциркулем радиусы валов R_1 и R_2.
4. Закрепить на крестовине четыре диска на расстоянии ℓ_1 от оси вращения.
5. Закрепить левый конец нити на валу радиуса R_1 и к свободному концу нити подвесить груз массой m_1.
6. Установить с помощью ограничителя A высоту h, с которой падает груз массой m.
7. Нажать кнопку «Сеть».
8. Совместить нижний край падающего груза с верхним краем ограничителя A.
9. Нажать кнопку «Пуск». Система блокируется.
10. Отжать кнопку «Пуск».
11. Измерить путь h, пройденный грузом, и время его прохождения.
12. Нажать кнопку «Сброс». На табло секундомера должны высвечиваться нули.
13. Вернуть груз в исходное положение и повторить опыт не менее трех раз.
14. Отжать кнопку «Сеть».
15. Определить среднее значение времени $\bar{t}$ падения груза данной массы.
16. Занести данные в табл. 1.

Таблица 1

№ опыта	h, м	ℓ, м	R_1, м	m_1, кг	t_1, с	$\bar{t}_1$, с
1.						
2.						
3.						

17. Закрепить левый конец нити на валу радиуса R_2 и к свободному концу нити подвесить груз массой m_2.

18. Повторить пункты 5–14.

19. Занести данные в табл. 2.

Таблица 2

№ опыта	h, м	ℓ, м	R_2, м	m_2, кг	t_2, с	$\bar{t}_2$, с
1.						
2.						
3.						

20. Проверить соотношение (9).

21. Повторить пункты 5–15 для расстояний ℓ_2 и ℓ_1 при $m = m_1$, $R = R_1$.

22. Все измеренные величины занести в табл. 3. Данные для расстояния ℓ_1 взять из табл. 1.

Таблица 3

№ опыта	ℓ_1, м	ℓ_2, м	ℓ_3, м	t_1, с	$\bar{t}_1$, с	t_2, с	$\bar{t}_2$, с	t_3, с	$\bar{t}_3$, с
1.									
2.									
3.									

23. Проверить соотношение (15), используя значения $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, $\bar{t}_3$.

Упражнение 2

Определение момента инерции тела

Определение момента инерции тела проводится по рабочей формуле (8).

Порядок выполнения работы

1. Провести измерения по пунктам 1–14 упражнения 1.

2. Вычислить по рабочей формуле (8) значение момента инерции I маятника, нагруженного дисками.

3. Рассчитать среднее значение момента инерции $\bar{I}$ маятника и погрешности измерений.

4. Данные измерений и вычислений занести в табл. 4.

Таблица 4

№ опыта	h, м	ℓ_1, м	R_1 м	m_1, кг	t, с	I, кг·м^2	$\bar{I}$, кг·м^2	ΔI, кг·м^2	$\Delta\bar{I}$, кг·м^2	$\frac{\Delta\bar{I}}{\bar{I}}\cdot 100\%$
1.										
2.										
3.										

5. Снять диски с крестовины.

6. Провести измерения по пунктам 7–14 упражнения 1.

7. Вычислить по рабочей формуле (8) значение момента инерции I_0 маятника, ненагруженного дисками.

8. Рассчитать среднее значение момента инерции $\bar{I}_0$ маятника и погрешности измерений.

9. Данные измерений и вычислений занести в табл. 5.

Таблица 5

№ опыта	h, м	R_1 м	m_1, кг	t_1, с	$\bar{t}_1$, с	I_0, кг·м^2	$\bar{I}_0$, кг·м^2	ΔI_0, кг·м^2	$\Delta\bar{I}_0$, кг·м^2	$\frac{\Delta\bar{I}_0}{\bar{I}_0}\cdot 100\%$
1.										
2.										
3.										

10. Определить момент инерции диска относительно оси крестовины, используя экспериментальные данные табл. 4 и 5:

$$\bar{I}_д = (\bar{I} - \bar{I}_0)/4. \qquad (16)$$

11. Вычислить теоретическое значение момента инерции диска относительно оси крестовины, используя теорему Штейнера–Гюйгенса

$$I'_д = \frac{1}{4} m_д R^2 + m_д \ell^2, \qquad (17)$$

где $\frac{1}{4} m_д R^2$ – момент инерции диска относительно поперечной оси, совпадающей с диаметром диска.

12. Вычислить погрешность экспериментального определения момента инерции диска (16) относительно теоретического значения (17):

$$\frac{\left|I'_д - \bar{I}_д\right|}{I'_д}\cdot 100\% = \frac{\left|\Delta\bar{I}_д\right|}{I'_д}\cdot 100\%.$$

13. Записать окончательный результат экспериментального определения момента инерции диска с учетом рассчитанной погрешности в виде:

$$I_д = \bar{I}_д \pm \Delta\bar{I}_д.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основное уравнение вращательного движения твердого тела.
2. Сформулируйте понятия: «момент силы относительно точки», «момент силы относительно оси», «угловое ускорение».
3. Объясните физический смысл понятия «момент инерции»?
4. Сформулируйте теорему Штейнера–Гюйгенса.
5. Рассчитайте момент инерции диска относительно поперечной оси.
6. Как можно экспериментально доказать справедливость основного уравнения вращательного движения?
7. Какие неучтенные факторы влияют на точность эксперимента?

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие : в 5 т. Т. 1. Механика / Сивухин Д. В. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. § 33, 35, 36 (пп. 1, 7).

Обработка результатов измерений в физическом практикуме : учеб.-метод. пособие для студентов физического и других естественных факультетов / сост. : В. А. Костяков, А. А. Игнатьев, Т. Н. Тихонова, А. В. Ляшенко ; под ред. проф. А. А. Игнатьева. 3-е изд., перераб. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 40 с.

Дополнительная литература

Савельев, И. В. Курс общей физики : учеб. пособие для втузов : в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика / Савельев И. В. СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008. 432 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Порядок проведения измерений периода колебаний крутильного маятника

1. Включить установку, нажав кнопку «Сеть».
2. Подвести флажок рамки к сердечнику электромагнита, удерживая ее в фиксированном положении.
3. Нажать кнопку «Сброс», обнулив показания табло крутильного маятника.
4. Нажать кнопку «Пуск», освобождая рамку.
5. Нажать кнопку «Стоп», когда маятник совершит 10–15 колебаний. Записать время t и количество периодов колебаний n по показаниям универсального миллисекундомера.
6. Отжать кнопку «Пуск».
7. Подсоединить флажок к сердечнику электромагнита.
8. Обнулить показания, нажав кнопку «Сброс».
9. Вычислить период T колебаний крутильного маятника по формуле

$$T = \frac{t}{n},$$

где t – время n периодов колебаний.

10. Повторить измерения не менее трех раз.
11. Выключить установку, нажав кнопку «Сеть».

СОДЕРЖАНИЕ

Момент инерции твёрдого тела…….…… 3
Теоретические замечания……..... 3

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Определение момента инерции твёрдого тела относительно произвольной оси……..……... 11

Определение момента инерции тела с помощью крутильного маятника 19

Определение момента инерции тела с помощью трифилярного подвеса 22

Проверка основного уравнения вращательного движения и определение момента инерции тела с помощью маятника Обербека 29

П р и л о ж е н и е . Порядок проведения измерений периода колебаний крутильного маятника 36

Учебное издание

ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ
МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

Учебно-методическое пособие
для студентов естественных факультетов

Составители:

Игнатьев Александр Анатольевич
Страхова Людмила Львовна,
Кудрявцева Светлана Петровна,
Тихонова Таисия Николаевна,

Под редакцией профессора *А. А. Игнатьева*

Редактор *И. Ю. Бучко*
Технический редактор *В. В. Володина*
Корректор *Е. Б. Крылова*
Оригинал-макет подготовили *О. Г. Данке, Т. Н. Сиротинина*

Подписано в печать 05.06.2012. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 1,16 (1,25). Тираж 100. Заказ 37.

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.