УДК 517.521

Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем[1]

М. Г. Магомед-Касумов (Махачкала, Владикавказ, Россия)
rasuldev@gmail.com

Получены необходимые и достаточные условия на вес, при которых система Хаара является базисом в весовом пространстве Лебега с переменным показателем.

Ключевые слова: система Хаара, базисность, пространство Лебега с переменным показателем, вес.

Basis property of the Haar system in weighted variable Lebesgue spaces[1]

M. G. Magomed-Kasumov (Makhachkala, Vladikavkaz, Russia)
rasuldev@gmail.com

Necessary and sufficient conditions for the weight are obtained under which the Haar system is a basis in the weighted variable Lebesgue space.

Keywords: Haar system, basis property, variable Lebesgue space, weight.

Введение

Функции Хаара можно определить посредством формул [1]

$$\chi_1(x) = 1, \quad \chi_n(x) = \begin{cases} 0, x \notin \overline{\Delta}_n, \\ 2^{k/2}, x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2}, x \in \Delta_n^-, \end{cases}$$

где двоичный интервал $\Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$, $n = 2^k + i$, $i = 1, \ldots, 2^k$, $k \geq 0$, а Δ_n^+ и Δ_n^- обозначают соответственно левую и правую половины интервала Δ_n. Заметим, что

$$|\chi_n(x)| = |\Delta_n|^{-1/2} \widetilde{\chi}_{\Delta_n}(x). \tag{1}$$

Для каждой функции $f \in L^1(E)$ можно определить ряд Фурье и его частичную сумму:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\chi_k(x), \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\chi_k(x),$$

где $c_k(f) = \int_0^1 f(t)\chi_k(t)dt$.

Пусть на множестве $E = [0,1]$ задана измеримая функция $p : E \to [1,\infty]$ (показатель) и неотрицательная почти всюду (п.в.) положительная суммируемая функция $w(x)$ (вес). Определим модуляр [2]:

$$\rho(f) = \rho_{p(\cdot),w,E}(f) = \int_{E\setminus E_\infty} |f(x)|^{p(x)} w(x)dx + \|f\|_{L^\infty(E_\infty)},$$

где $E_\infty = \{x \in E : p(x) = \infty\}$.

Через $L_w^{p(\cdot)} = L_w^{p(\cdot)}(E)$ обозначим пространство измеримых функций $f(x)$, для которых $\rho(f/\lambda) < \infty$ при некотором $\lambda > 0$. Пространство $L_w^{p(\cdot)}$ представляет собой линейное нормированное пространство, в котором одну из эквивалентных норм можно определить равенством [2–5]

$$\|f\|_{L_w^{p(\cdot)}(E)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho(f/\lambda) \le 1\} < \infty.$$

Через $p'(x)$ будем обозначать сопряженный показатель:

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1,$$

полагая при этом $1/\infty = 0$.

Основной результат

В работе [6] получены необходимые и достаточные условия на вес, при которых система Хаара образует базис в весовых пространствах Лебега с постоянным показателем. На переменный показатель этот результат частично перенесен в статье [7], в которой выведены лишь достаточные условия на вес. Основной целью данной работы является получение необходимых и достаточных условий базисности системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем.

Пусть $R = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = 1\}$ — некоторое разбиение отрезка $[0,1]$. Множество измеримых на $E = [0,1]$ функций $p(x) : E \to [1,\infty)$, удовлетворяющих на каждом интервале разбиения (a_i, a_{i+1}) условию

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{1}{|x-y|} \le C, \tag{2}$$

обозначим символом $\mathcal{P}^{log}(R)$. Через $\widetilde{\chi}_Q(x)$ будем обозначать характеристическую функцию множества Q.

Теорема. *Пусть $p(x) \in \mathcal{P}^{log}(R)$. Система Хаара является базисом пространства $L_w^{p(\cdot)}(E)$ тогда и только тогда, когда*

$$\Delta_n^{-1} \|w^{1/p}\widetilde{\chi}_{\Delta_n}\|_{L^{p(\cdot)}} \|w^{-1/p}\widetilde{\chi}_{\Delta_n}\|_{L^{p'(\cdot)}} < C(p,w). \tag{3}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Кашин Б.С., Саакаян А.А.* Ортогональные ряды. Изд. 2-е, доп. М.: Изд-во АФЦ, 1999. 560 с.

[2] *Cruz-Uribe D.V., Fiorenza A.* Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis. Basel: Springer, 2013. P. 312.

[3] *Шарапудинов И.И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Матем. заметки, 1979. Том 26, вып. 4. С. 613–632.

[4] *Шарапудинов И.И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем / Отв. ред. А. Г. Кусраев. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012. 270 с.

[5] *L. Diening, P. Harjulehto, P. Hasto, M. Ruzicka* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. P. 509.

[6] *Кранцберг А.С.* О базисности системы Хаара в весовых пространствах // Московский ин-т электронного машиностроения, 1971. Вып. 24. С. 14–21.

[7] *Магомед-Касумов М.Г.* Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Владикавказский математический журнал, 2014. Вып. 3. С. 38–46.