Отметим, что без учета шага последовательности нулей точные оценки снизу типа целой функции получены ранее в работах [3], [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шерстюкова О. В.* О влиянии шага последовательности нулей целой функции порядка меньше единицы на величину ее типа // Наука в вузах : математика, информатика, физика, образование. М. : МПГУ. 2010. С. 192–195.

2. *Шерстюкова О. В.* Об экстремальном типе целой функции порядка меньше единицы с нулями фиксированных плотностей и шага // Уфимский мат. журн. 2012. Т. 4, № 1. С. 161–165.

3. *Попов А. Ю.* Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2005. № 1. С. 31–36.

4. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. математическая. 2011. Т. 75, № 1. С. 3–28.

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ НА ГРАФАХ С ЦИКЛОМ[1]

В. А. Юрко (Саратов, РФ)

YurkoVA@info.sgu.ru

Рассмотрим компактный граф T in $\mathbf{R^m}$ с множеством вершин $V = \{v_0, \ldots, v_r\}$, $r \geqslant 1$, и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_0, \ldots, e_r\}$, где $v_1, \ldots, v_r$ — граничные вершины, v_0 — внутренняя вершина, $e_j = [v_j, v_0]$, $j = \overline{1, r}$, $e_0 \cap \ldots \cap e_r = \{v_0\}$, и e_0 — цикл. Пусть T_j, $j = \overline{0, r}$ — длина ребра e_j. Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, T_j]$. Удобно выбрать следующую ориентацию: для $j = \overline{1, r}$ вершина v_j соответствует $x_j = 0$, а вершина v_0 соответствует $x_j = T_j$; для $j = 0$, оба конца $x_0 = +0$ и $x_0 = T_0 - 0$ соответствуют v_0. Функция Y на T имеет вид $Y = \{y_j\}_{j=\overline{0,r}}$, где $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, T_j]$ определена на ребре e_j. Положим $U_j(Y) := y_j'(0) - (i\rho h_{j1} + h_{j0})y_j(0)$, $j = \overline{0, r}$, где ρ — спектральный параметр, h_{jk} — комплексные числа и $h_{j1} \neq \pm 1$ при $j = \overline{1, r}$. Обозначим $h_k = \{h_{jk}\}_{j=\overline{0,r}}$, $k = 0, 1$. Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{0,r}}$ и $p = \{p_j\}_{j=\overline{0,r}}$ — комплекснозначные функции на T; пара (q, p) называется потенциалом. Предположим, что $q_j(x_j) \in L(0, T_j)$, а $p_j(x_j) \in AC[0, T_j]$. Рассмотрим дифференциальное уравнение на T:

$$y_j''(x_j) + (\rho^2 + \rho p_j(x_j) + q_j(x_j))y_j(x_j) = 0, \quad x_j \in (0, T_j), \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00134).

где $j = \overline{0,r}$, функции $y_j(x_j)$, $y'_j(x_j)$ абсолютно непрерывны на $[0, T_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки в вершине v_0:

$$y_0(0) = \alpha_j y_j(T_j),\ j = \overline{0,r}, \qquad U_0(Y) = \sum_{j=0}^{r} \beta_j y'_j(T_j). \tag{2}$$

Здесь $\alpha_j \beta_j \neq 0,\ 1 + \alpha_0 \beta_0 \neq 0$. Пусть $z_0^{\pm} z_r^{\pm} \neq 0$, где

$$z_0^{\pm} = \alpha_0(1 \mp h_{01}) + \beta_0, \quad z_{k+1}^{\pm} = \alpha_{k+1} z_k^{\pm} + \beta_{k+1} \prod_{j=0}^{k} \alpha_j, \quad k = \overline{0, r-1}.$$

Рассмотрим краевую задачу $B_0 := B_0(q, p, h_1, h_0)$ на T для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями

$$U_j(Y) = 0, \quad j = \overline{1,r}. \tag{3}$$

Рассмотрим также краевые задачи $B_k := B_k(q, p, h_1, h_0)$, $k = \overline{1,r}$, для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями $y_k(0) = 0$, $U_j(Y) = 0$, $j = \overline{1,r} \setminus k$. Обозначим через $\Lambda_k := \{\rho_{kn}\}_{n \in \mathbf{Z}}$ собственные значения (с учетом кратностей) задач $B_k(q)$, $k = \overline{0,r}$. В отличие от случая деревьев (см. [1]), здесь задание спектров Λ_k, $k = \overline{0,r}$ не определяет однозначно потенциал, и нам нужна дополнительная информация. Пусть B — краевая задача на ребре e_0 для уравнения (1) с $j = 0$, при условиях $y_0(0) = \alpha_0 y_0(T_0)$, $U_0(y_0) = \beta_0 y'_0(T_0)$. Пусть $\Omega = \{\omega_n\}$ — Ω-последовательность для B (см. [2]), и пусть коэффициенты α_j, β_j из (2) известны априори.

Обратная задача 1. Даны Λ_k, $k = \overline{0,r}$, и Ω, построить потенциал (q, p) на T и коэффициенты h_1, h_0.

Теорема 1. *Задание Λ_k, $k = \overline{0,r}$ и Ω однозначно определяет потенциал (q, p) на T и коэффициенты h_1, h_0.*

Пусть $S_j(x_j, \rho)$, $\varphi_j(x_j, \rho)$, $j = \overline{0,r}$ — решения уравнения (1) на ребре e_j при условиях $S_j(0, \rho) = 0$, $S'_j(0, \rho) = \varphi_j(0, \rho) = 1$, $\varphi_j(0, \rho) = i\rho h_{j1} + h_{j0}$. Зафиксируем $k = \overline{1,r}$. Пусть $\Phi_k = \{\Phi_{kj}\}_{j=\overline{0,r}}$ — решение уравнения (1) при условиях склейки (2) и краевых условиях

$$U_j(\Phi_k) = \delta_{jk}, \quad j = \overline{1,r}, \tag{4}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Положим $M_k(\rho) := \Phi_{kk}(0, \rho)$, $k = \overline{1,r}$. Функция $M_k(\rho)$ называется *функцией Вейля* относительно граничной вершины v_k. Обозначим $M^1_{kj}(\rho) := \Phi_{kj}(0, \rho)$, $M^0_{kj}(\rho) := \Phi'_{kj}(0, \rho) - (i\rho h_{j1} + h_{j0})\Phi_{kj}(0, \rho)$. Тогда

$$\Phi_{kj}(x_j, \rho) = M^0_{kj}(\rho) S_j(x_j, \rho) + M^1_{kj}(\rho) \varphi_j(x_j, \rho), \quad j = \overline{0,r}, \quad k = \overline{1,r}. \tag{5}$$

Имеем $M^0_{kk}(\rho) = 1$, $M^1_{kk}(\rho) = M_k(\rho)$, и $M^0_{kj}(\rho) = 0$ при $j = \overline{1,r} \setminus k$. Подставляя (5) в (2) и (4), получаем линейную алгебраическую систему s_k относительно $M^\nu_{kj}(\rho)$, $\nu = 0,1$, $j = \overline{0,r}$. Определитель $\Delta_0(\rho)$ системы s_k не зависит от k и имеет вид

$$\Delta_0(\rho) = d(\rho)\prod_{j=1}^r \alpha_j\varphi_j(T_j,\rho) + d_0(\rho)\sum_{i=1}^r \beta_i\varphi_i'(T_i,\rho)\prod_{j=1,\, j\neq i}^r \alpha_j\varphi_j(T_j,\rho),$$

$$d(\rho) = \alpha_0\varphi_0(T_0,\rho) + \beta_0 S_0'(T_0,\rho) - (1+\alpha_0\beta_0), \quad d_0(\rho) = \alpha_0 S_0(T_0,\rho).$$

Функция $\Delta_0(\rho)$ является целой по ρ, и ее нули совпадают с собственными значениями задачи B_0. Решая систему s_k по правилу Крамера, получаем $M^s_{kj}(\rho) = \Delta^s_{kj}(\rho)/\Delta_0(\rho)$, $s = 0,1$, $j = \overline{0,r}$, где определитель $\Delta^s_{kj}(\rho)$ получается из $\Delta_0(\rho)$ заменой соответствующего $M^s_{kj}(\rho)$ столбца на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\rho) = -\Delta_k(\rho)/\Delta_0(\rho), \quad k = \overline{1,r},$$

$$\Delta_k(\rho) = d(\rho)(\alpha_k S_k(T_k,\rho))\prod_{j=1,\, j\neq k}^r (\alpha_j\varphi_j(T_j,\rho)) + d_0(\rho)\Big(\beta_k S_k'(T_k,\rho)\times$$

$$\prod_{j=1,\, j\neq k}^r \alpha_j\varphi_j(T_j,\rho) + \alpha_k S_k(T_k,\rho)\sum_{i=1,\, i\neq k}^r \beta_i\varphi_i'(T_i,\rho)\prod_{j=1,\, j\neq i,k}^r \alpha_j\varphi_j(T_j,\rho)\Big).$$

Зафиксируем $k = \overline{1,r}$ и рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу на ребре e_k, которую назовем IP(k).

IP(k). Даны два спектра Λ_0 и Λ_k, построить $q_k(x_k)$, $p_k(x_k)$, $x_k \in [0,T_k]$, h_{k1}, h_{k0}.

Теорема 2. *Фиксируем $k = \overline{1,r}$. Задание двух спектров Λ_0 и Λ_k однозначно определяет функцию Вейля $M_k(\rho)$ и коэффициент h_{k1}.*

Теорема 3. *Фиксируем $k = \overline{1,r}$. Задание двух спектров Λ_0 и Λ_k однозначно определяет потенциал (q_k, p_k) на ребре e_k и h_{k1}, h_{k0}.*

Используя метод спектральных отображений [4] для уравнения (1) на ребре e_k, можно получить конструктивную процедуру решения обратной задачи IP(k) (подробнее см. [3]). Решение обратной задачи 1 может быть найдено по следующему алгоритму.

Алгоритм. *Пусть заданы Λ_k, $k = \overline{0,r}$ и Ω.*

1. При каждом фиксированном $k = \overline{1,r}$ решаем обратную задачу $IP(k)$ и находим функции $q_k(x_k)$, $p_k(x_k)$, $x_k \in (0,T_k)$ на ребре e_k, и коэффициент h_{k0}.

2. Вычисляем функции $\varphi_k^{(\nu)}(T_k,\rho)$, $S_k^{(\nu)}(T_k,\rho)$.

3. Строим функции $d_0(\rho)$ *и* $d(\rho)$ *по алгоритму 1 из* [3].

4. Находим $q_0(x_0)$, $p_0(x_0)$, $x_0 \in (0,T_k)$ *и* h_{00}, h_{01} *по* $d_0(\rho)$, $d(\rho)$ *и* Ω, *используя алгоритм 2 из [2].*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. Vol. 21. P. 1075–1086.

2. *Yurko V. A.* Inverse problems for non-selfadjoint quasi-periodic differential pencils // Analysis and Math. Physics. 2012 Vol. 2, № 3. P. 215–230.

3. *Yurko V. A.* Differential pensils on graphs with a cycle. Schriftenreiche des Fachbereichs Mathematik, SM-DUE-758, Uni. Duisburg-Essen, 2013. 12 p.

4. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-posed Problems Series. VSP, Utrecht, 2002.