УДК 517.53/.54

УСЛОВИЕ ТИПА БЛЯШКЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ[2]

Ф. А. Шамоян, Е. Г. Родикова (Брянск, РФ)
shamoyanfa@yandex.ru, evheny@yandex.ru

Пусть $\mathbb{D}$ — единичный круг на комплексной плоскости, $\mathbb{T}$ — его граница, $H(\mathbb{D})$ — множество всех аналитических в $\mathbb{D}$ функций, $E = \{e^{i\tau_k}\}_{k=0}^{n-1} \in \in \mathbb{T}$ — n точек на единичной окружности $\mathbb{D}$. Обозначим $\rho(z, E) = = dist(z, E)$ — расстояние от произвольной точки $z \in \mathbb{D}$ до множества E. Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ символом x_+ будем обозначать $\max(x, 0)$. Рассмотрим класс

$$H_\varphi(E) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \ln |f(z)| \leqslant c_f \varphi\left(\frac{1}{\rho(z, E)}\right),\ z \in \mathbb{D} \right\}.$$

В работе [1] было установлено следующее утверждение:

Теорема A. *Если $f \in H_\varphi(E)$, $\varphi(t) = t^q$, $q \geqslant 0$, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — последовательность нулей функции f, то сходится ряд:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\rho(z_k, E))^{(q-1+\varepsilon)_+}(1 - |z_k|) < +\infty, \tag{1}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

Подобные результаты имеют ряд важных приложений в теории операторов, теории аппроксимации и других разделах комплексного и функционального анализа (см. там же). Естественным образом возникает вопрос, насколько точным является условие (1), а также задача получения аналогов теоремы A для более общих классов функций, в частности, для класса $H_\varphi(E)$ с нестепенным весом $\varphi(t)$.

В том случае, когда $E = \mathbb{T}$, $\varphi(t) = t^q$, $0 < q \leqslant 1$, теоремы типа A были установлены в работах М. М. Джрбашяна [2], Х. Шапиро и А. Шилдса [3]. Для случая $E = \mathbb{T}$, $\varphi(t) = t^q$, $q > 1$ и для более общих весов полное описание корневых множеств получено Ф. А. Шамояном (см. [4]).

Нами установлен следующий результат:

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-97508)

Теорема 1. *Пусть $f \in H_\varphi(E)$, где $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая положительная функция, $\varphi \in C^{(1)}(1, +\infty)$, такая что*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)} = \alpha_\varphi \geqslant 1,$$

$\psi(x) \downarrow 0$ при $x \to 0+$, такая что $\psi \in C^{(1)}(0, +\infty)$, и при этом

$$\lim_{R \to +\infty} \psi\left(\frac{1}{R}\right) \frac{\varphi(R)}{R} < +\infty.$$

Тогда если $\int\limits_{r_E}^{+\infty} \psi'\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\varphi(x)}{x^3} dx < +\infty$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \psi(\rho(z_k, E))(1 - |z_k|) < +\infty. \tag{2}$$

Обратно, если $\int\limits_{r_E}^{+\infty} \psi'\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\varphi(x)}{x^3} dx = +\infty$, то существует тождественно отличная от нуля функция $g \in H_\varphi(E)$, такая что $g(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, для которой ряд (2) расходится.

Замечание 1. Если в формулировке теоремы 1 положить $0 < \alpha_\varphi < 1$, то ряд (2) будет сходиться даже в том случае, когда $\psi(x) > \delta > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ (см. [2]–[4]). Аналог теоремы 1 в случае, когда $E = \mathbb{T}$, получен в работе [5]. Отметим также, что метод доказательства теоремы 1 существенно отличается от методов, используемых в работе [1].

Замечание 2. Из теоремы 1 следует, что оценка (1) теоремы A близка к точной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borichev A., Golinskii L., Kupin S.* A Blaschke-type condition and its application to complex Jacobi matrices // Bulletin of the London Math. Soc. 2009. Vol. 41. P. 117–123.

2. *Джрбашян М. М.* К проблеме представимости аналитических функций // Сообщ. Ин-та мат. и мех. АН Арм. ССР. 1948. Т. 2. С. 3-–40.

3. *Shapiro H., Shields A.* On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces // Math. Z. 1962. Vol. 80. P. 217–229.

4. *Djrbashian A. E., Shamoyan F. A.* Topics in the Theory of A^p_α Spaces. Teubner-Texte zur Math. 1988. Vol. 105.

5. *Шамоян Ф. А.* О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи его границы // Изв. АН АрмССР, Сер. Математика. 1983. Т. 18, № 1. С. 215–228.