УДК 591.65

ОБ УТОЧНЕНИИ ОДНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА

И. А. Шакиров (Набережные Челны, РФ)
iskander@tatngpi.ru

На практике в качестве приближенного выражения функции $x(t) \in \in C_{2\pi} = C[0, 2\pi]$ часто используют полином Лагранжа

$$\Phi_n^*(x,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x(t_k)D_n^*(t_k - t) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} x(t_k)D_n^*(t_k - t) \quad \left(D_n^*(u) = \frac{\sin nu}{2tg0,5u}\right), \tag{1}$$

определенный в четном числе $N = 2n$ узлов вида $t_k = \pi k/n$ ($k = = \overline{0, 2n-1} \vee k = \overline{1, 2n}$, $n \in N$). При этом норма отклонения полинома (1) от заданной функции оценивается согласно фундаментальному неравенству $\|x - \Phi_n^* x\|_{C[0,2\pi]} \leqslant (1 + \lambda_n^*)E_n(x)$ $(\Phi_n^* : C_{2\pi} \to C_{2\pi})$, где константа Лебега имеет следующий вид:

$$\lambda_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ctg}\frac{2k+1}{4n}\pi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi \ \ (N = 2n). \tag{2}$$

Формула (2) была декларирована в работе немецких математиков Элиха и Целлера [1]. В [2, с. 43–46] она доказана с некоторыми издержками, т.е. без установления достаточного условия экстремума соответствующей (2) функции Лебега $\lambda_n^*(t)$. В работе автора [3] проведено полное доказательство формулы (2) с использованием производных до второго порядка включительно от безмодульного выражения функции $\lambda_n^*(t)$ (см. также [4]).

Первоначально интерполяционная характеристика (2) оценивалась сверху как $\lambda_n^* \leqslant O(\ln n)$ либо $\lambda_n^* \leqslant A + B\ln n$, например, $\lambda_n^* \leqslant 4 + \lg n$ [5], $\lambda_n^* \leqslant 8 + (4/\pi)\ln n$ [6]. Затем коэффициенты A, B многократно уточнялись, например, в [7, с.106] верхняя оценка для константы Лебега $\lambda_n^* \leqslant 4/\pi + (2/\pi)\ln(4n/\pi)$ установлена на основе формулы (2). В [8, с.215] приведено представление $\lambda_{2n-1}^* \leqslant (2/\pi)\ln n + 2(1 - 1/\pi)\theta_n$ $(\theta_n \in (0,1))$, содержащее некоторое уточнение поведения неопределенной константы $O(1)$ в асимптотическом равенстве

$$\lambda_n^* \cong \frac{2}{\pi}\ln n + O(1) \quad (N = 2n,\ n \to \infty). \tag{3}$$

Отметим, что в (3) до сих пор не определено конкретное значение константы $O(1)$, которое сохраняло бы хорошую близость его левой и правой частей при произвольно взятых значениях параметра n. В связи с этим в данной работе ставится и решается следующая

Задача. *Определить* ***наименьшее*** *значение A^* неопределенной константы $O(1)$ в (3) так, чтобы для всех натуральных значений параметра n было выполнено неравенство $\lambda_n^* \leqslant A^* + (2/\pi)\ln n \ \ (n \in N)$, и оценить допущенную при этом погрешность $\varepsilon^* = \sup\{A^* + (2/\pi)\ln n - \lambda_n^* \mid n \in N\}$.*

Определение. Строго монотонную функцию $\varphi = \varphi(n) \ \ (n \in D(\varphi) \subseteq \subseteq N)$ дискретного аргумента, имеющую малое изменение δ $(\delta \in (0, 0.1))$ области значений $R(\varphi)$, назовем *функцией, имеющей малую монотонную вариацию*, и класс таких функций обозначим через $V_\delta^\pm$ («$\pm$» — в случае возрастания и убывания функции в $D(\varphi)$ соответственно).

Теорема 1. *Для константы Лебега* (2) *справедлива следующая двусторонняя оценка:*

$$\frac{5-\sqrt{2}}{4}\alpha_n\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n < \lambda_n^* <$$
$$< \alpha_n\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n \ \forall\ n \geqslant 2, \tag{4}$$

где $\alpha_n = \alpha(n) = \frac{1}{n}\mathrm{cosec}(\pi/2n) \in V_\delta^-$.

Доказательство. Функциональная зависимость $\alpha_n = \alpha(n)$ $(n \geqslant 2)$ является дискретным аналогом равномерно убывающей на промежутке $[2, +\infty]$ непрерывно дифференцируемой функции $y = \frac{1}{x}\mathrm{cosec}(\pi/2x)$, имеющей малое изменение области значения $R(y) = (2/\pi, \sqrt{2}/2] \subset \subset (0.636, 0.708)$. Следовательно, $\alpha_n \in V_\delta^-$ с достаточно малой вариацией $\delta = \sqrt{2}/2 - 2/\pi < 0.071$.

Оценим константу Лебега сверху и снизу, максимально используя при этом геометрические свойства определенного интеграла и котангенса:

$$\lambda_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{ctg}\,\frac{t_k - \pi/2n}{2} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\mathrm{ctg}\,\frac{t_1-\pi/2n}{2} + \sum_{k=2}^{n}\frac{\pi}{n}\mathrm{ctg}\,\frac{t_k-\pi/2n}{2}\right] <$$

$$< \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{t_1}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt = \frac{2\cos^2(\pi/4n)}{n\sin(\pi/2n)} + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2n}^{\pi/2}\operatorname{ctg}t\,dt =$$

$$= \alpha_n(1+\cos(\pi/2n)) + \frac{2}{\pi}\ln\frac{n}{n\sin(\pi/2n)} = \alpha_n(1+\cos(\pi/2n)) +$$

$$+\frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n \quad \left(\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} = \alpha_n(1+\cos(\pi/2n))\right);$$

$$\lambda_n^* = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + \left[\frac{1}{4}\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + \sum_{k=2}^{n}\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{t_k-\pi/2n}{2}\right]\right\} >$$

$$> \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + \left[(\frac{\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n})\cdot\frac{1}{2} + (\frac{\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4n})\cdot\frac{1}{2} + \int_{t_1}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt\right]\right\} =$$

$$= \frac{3}{4n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + \frac{1}{8n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + \frac{1}{8n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{4\cos^2(\pi/4n)-3}{3-4\sin^2(\pi/4n)} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2n}^{\pi/2}\operatorname{ctg}t\,dt > (\frac{7}{8} + \frac{3-2\sqrt{2}}{8})\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n =$$

$$= \frac{5-\sqrt{2}}{4}\alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n$$

(дополнительно использовано неравенство $\dfrac{4\cos^2(\pi/4n)-3}{3-4\sin^2(\pi/4n)} \geqslant 3-2\sqrt{2}$, $n \geqslant 2$).

Замечание 1. Значению параметра $n=1$ в формуле (2) соответствует тривиальный случай: $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_1^*(t) \equiv 1$ [3]. Если же в неравенстве (4) положим $n=1$, то противоречия не получим, а имеем лишь его нестрогий вариант: $(5-\sqrt{2})/4 < \lambda_1^* \leqslant 1$.

Участвующие в неравенстве (4) функции $\varphi_1(n) = \alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n})$, $\varphi_2(n) = (2/\pi)\ln\alpha_n$ и их линейные комбинации, как нетрудно в этом убедиться, принадлежат классам $V_\delta^\pm$. Сказанное позволяет в (4) за точное значение константы λ_n^* с небольшой погрешностью взять полусумму ее верхней и нижней оценок, замененную затем с некоторой погрешностью выражением $\mu_n^* = \mu^*(n) = 1 + (2/\pi)\ln n$ $(n \geqslant 2)$, т.е.

$$\lambda_n^* \approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5-\sqrt{2}}{4}\right)\alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n =$$

$$= \left(\frac{9-\sqrt{2}}{8}\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n\right) + \frac{9-\sqrt{2}}{8}\alpha_n\cos\frac{\pi}{2n} + \frac{2}{\pi}\ln n \approx$$

$$\approx 1 + \frac{2}{\pi}\ln n = \mu_n^* \quad (n \geqslant 2).$$

Теорема 2. *Асимптотическое равенство (3) при $A^* = 1$ и произвольно выбранных значениях параметра n ведет себя как неравенство*

$$\lambda_n^* \leqslant 1 + \frac{2}{\pi}\ln n = \mu_n^*, \ \ n \in N \ (\Longleftrightarrow \lambda_n^* \approx \mu_n^*, \ n \in N). \tag{5}$$

а для допущенной при конкретных значениях n погрешности $\varepsilon_n^* = \mu_n^* - \lambda_n^*$ равномерно относительно параметра верна оценка:

$$\varepsilon^* = \sup\{\varepsilon_n^* \mid n \in N\} = \sup\{\mu_n^* - \lambda_n^* \mid n \in N\} < 0.147. \tag{6}$$

Доказательство. Если значение параметра $n = 1$, то в неравенстве (5) левая и правая его части совпадают, т.е. имеем случай $\lambda_1^* = \mu_1^* = 1$.

Пусть теперь $n \geqslant 2$. Тогда для оценки допущенной в (5) погрешности ε_n^* в неравенстве (4) вычтем всюду $\mu_n^* = 1 + \frac{2}{\pi}\ln n$ и после некоторых преобразований получим:

$$\begin{gathered}
\frac{5-\sqrt{2}}{4}\alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n - 1 < \lambda_n^* - \mu_n^* < \\
< \alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n - 1 \Leftrightarrow \\
1 - \alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) - \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n < \mu_n^* - \lambda_n^* < \\
< 1 - \alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) - \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n - \frac{\sqrt{2}-1}{4}\alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) \quad \Leftrightarrow \\
1 - \varphi_1(n) - \varphi_2(n) < \varepsilon_n^* < 1 - \varphi_1(n) - \varphi_2(n) + ((\sqrt{2}-1)/4)\varphi_1(n) \quad \Rightarrow \\
\varphi_3(n) < \varepsilon_n^* < \varphi_4(n) \quad (\varphi_3(n) \equiv 1 - \varphi_1(n) - \varphi_2(n), \\
\varphi_4(n) \equiv \varphi_3(n) + ((\sqrt{2}-1)/4)\varphi_1(n), \ n \geqslant 2).
\end{gathered} \tag{7}$$

Для введенных в (7) функций $\varphi_k = \varphi_k(n)$ $(k = 3, 4)$ верны соотношения:

$$\varphi_3 \in V_\delta^+, \quad R(\varphi_3) = \left[\frac{1-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\pi}\ln 2, 1 - \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}\right) \subset (0.013, 0.015);$$

$$\varphi_4 \in V_\delta^+, \quad R(\varphi_4) = \left[\frac{5-4\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{\pi}\ln 2, 1 - \frac{5-\sqrt{2}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}\right) \subset$$
$$\subset (0.138, 0.147).$$

Переходя в двойном неравенстве (7) к точной верхней грани по аргументу n $(n \geqslant 2)$ и используя полученные сведения о функциях

$\varphi_3(n), \varphi_4(n)$, имеем: $0 < \sup\{\mu_n^* - \lambda_n^* \mid n \geqslant 2\} < 1 - (5-\sqrt{2})/\pi + \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} <$ < 0.147. С учетом случая $n = 1$ полученное неравенство перепишем в виде $0 \leqslant \sup\{\varepsilon_n^* \mid n \in N\} < 0.147$, откуда автоматически следует справедливость соотношений (5) и (6).

Замечание 2. В координатной системе nOY графики монотонно возрастающих и непрерывно продолженных на промежуток $[1, +\infty)$ функций $y = \mu_n^* = \mu^*(n)$, $y = \lambda_n^* = \lambda^*(n)$ при значении аргумента $n = 1$ имеют общую вершину $M^* = M^*(1, 1)$. Для остальных значений аргумента справедливо неравенство $\lambda^*(n) < \mu^*(n)$ $(n \geqslant 2)$ (см. теорему 2). Ясно, что вариация коэффициента A^* перемещает вершину графика функции $y = \mu^*(n, A^*) = A^* + \frac{2}{\pi}\ln n$ по прямой $n - 1 = 0$ параллельно оси OY. Поэтому увеличение $(A^* > 1)$ коэффициента A^* сохраняет строгий вариант неравенства (5), но одновременно увеличивает соответствующую погрешность $\varepsilon^*(A^*)$ вида (6); а его уменьшение $(A^* < 1)$ нарушает выполнение неравенства (5), но при этом погрешность $\varepsilon^*(A^*)$ может быть несколько уменьшена относительно установленной в теореме 2 погрешности ε^* из соотношения (6). Следовательно, $A^* = 1$ в неравенстве (5) является единственным решением поставленной в работе *задачи*, т. е. является наименьшим значением всевозможных констант, для которых справедливо неравенство (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ehlich H., Zeller K.* Auswertung der Normen von Interpolations operatoren // Math. Ann. 1966. Vol. 164.

2. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев : Наук. думка, 1988.

3. *Шакиров И. А.* Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам Лагранжа // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 80–88.

4. *Шакиров И. А.* О фундаментальных характеристиках семейства интерполяционных полиномов Лагранжа// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 99–104.

5. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М.; Л. : ГТТИ, 1934.

6. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.; Л. : Гостехиздат, 1949.

7. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1980.

8. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»S, 2002.