примеры полиномов Бернштейна для функции Больцано приводятся в статье Козловой [7]; рост коэффициентов там виден непосредственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wigert S.* Réflexions sur le polynome d'approximation

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \varphi\left(\frac{\nu}{n}\right) x^{\nu} (1-x)^{n-\nu}$$

// Arkiv för matematik, astronomi och fysik. 1927. Bd. 20. Häfte 2. S. 1–15.

2. *Davis P. J.* Interpolation and Approximation. N.Y. : Dover Publications, 1975. xvi+393 pp.

3. *Pop O. T., Farcaş M.* About Bernstein polynomial and the Stirling's numbers of second type // Creative Mathematics and Informatics. 2005. Vol. 14. P. 53–56.

4. *Farcaş M.* Approximation by linear operators of functions of one or several variables // Abstract of PHD Thesis. Baia Mare, 2008.

5. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. ЧелГУ. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

6. *Kocić Lj. M., Della Veccia B.* Degeneracy of positive linear operators // Facta Universitatis (Niš). Ser. Mathematics and Informatics. 1998. Vol. 13. P. 59–72.

7. *Козлова И. А.* Приближение функции Больцано многочленами Бернштейна // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 56–59.

УДК 517.97

ГЛОБАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ[1]

Е. А. Трушкова (Москва, РФ)
katerinatr@mail.ru

Рассматривается обобщенная задача оптимального управления для случая разрывов траектории $x(t)$ в точках $t = 0$, $t = \xi$ и $t = T$:

$$\begin{aligned}
&J(m) = F(x(T)) \to \min, \\
&x(0) = x_0, \quad x(0+) = \omega(\tau(0), 0, x(0)), \\
&\dot{x}(t) = g\left(t, x(t)\right) + h\left(t, x(t)\right) u(t), \quad t \in (0, \xi) \cup (\xi, T), \\
&x(\xi+) = \omega(\tau(\xi), \xi, x(\xi-)), \quad x(T) = \omega(\tau(T), T, x(T-)),
\end{aligned} \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00256a).

где $x(t)$ — n-мерная непрерывная на $(0,\xi)\cup(\xi,T)$ кусочно–дифференцируемая функция; управление $u(t)$ — скалярная кусочно–непрерывная функция, $\tau(0)$, $\tau(\xi)$, $\tau(T)\in\mathbb{R}$, $\omega(\tau,t,x)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d\omega}{d\tau}=h(t,\omega),\quad \omega(0,t,x)=x. \tag{2}$$

Непрерывно–дифференцируемые функции $F(x)$, $g(t,x)$, $h(t,x)$, состояние x_0 и момент T заданы. По аналогии с обобщенной задачей из [1], где рассматривались разрывы лишь в точках $t=0$ и $t=T$, обозначим через E множество допустимых обобщенных процессов

$$m=(x(t),u(t),\tau(0),\tau(\xi),\tau(T)).$$

Величины $\tau(0)$, $\tau(\xi)$ и $\tau(T)$ играют роль управляющих параметров. Обобщенное управление $(u(t),\ \tau(0),\tau(\xi),\tau(T))$ будем называть *импульсным.* Таким образом, каждому обобщенному управлению соответствует обобщенная траектория $x(t)$, разрывная по t в точках $t=0$, $t=\xi$ и $t=T$.

Поставим *задачу улучшения* для обобщенной постановки: задан процесс $m^0\in E$; требуется получить процесс $m\in E$ такой, что $J(m)<J(m^0)$. На эту задачу здесь доопределяется метод глобального улучшения, предложенный и исследованный в [1—3].

Введем в рассмотрение функционал

$$L(m)=G\left(\tau(T),x(T-)\right)+G^0(\tau(0))-\int\limits_0^T R(t,x,u)dt+G^1(\tau(\xi),x(\xi-)),$$

где $\varphi(t,x)$ непрерывно-дифференцируема по (t,x) при $t\neq\xi$,

$$G(\tau,x)=F\left(\omega(\tau,T,x)\right)+\varphi(T,x),\quad G^0(\tau)=-\varphi\left(0,\omega(\tau,0,x_0)\right),$$

$$G^1(\tau,x)=\varphi\left(\xi-,x\right)-\varphi\left(\xi+,\omega(\tau,\xi,x)\right),$$

$$R(t,x,u)=\varphi_x^T\left(g(t,x)+h(t,x)u\right)+\varphi_t,\quad t\in(0,T).$$

Функционал L является обобщенным лагранжианом для обобщенной задачи (1), т. е. $L(m)=J(m)$, $m\in E$.

Опишем одну итерацию *глобального алгоритма улучшения* для рассматриваемой обощенной задачи.

0. Задаем обобщенное управление $(u^0(t),\tau^0(0),\tau^0(\xi),\tau^0(T))$. Находим соответствующую траекторию $x^0(t)$ и вычисляем значение функционала $F\left(x^0(T)\right)=F\left(\omega(\tau^0(T),T,x^0(T-))\right)$.

1. Находим функцию $\varphi(t,x)$ из условий

$$G\left(\tau^0(T), x^0(T-)\right) \geqslant G(\tau^0(T), x) \ \ \forall\, x,$$
$$G^1\left(\tau^0(\xi), x^0(\xi-)\right) \geqslant G^1(\tau^0(\xi), x) \ \ \forall\, x,$$
$$R(t, x^0(t), u^0(t)) \leqslant R(t, x, u^0(t)) \ \ \forall\, x,\, t \in (0,\xi) \cup (\xi, T).$$

2. Построение улучшенного режима проводим последовательно для $t=0$, $t \in (0,\xi)$, $t=\xi$, $t \in (\xi, T)$, и $t=T$. А именно, разрывная трактория допустимого процесса строится следующим образом:

1) интегрируем уравнение (2) при $t=0$, $x=x_0$ и находим значение $\tau(0)$ из условия
$$\tau(0) \in \operatorname{Arg}\min_{\tau} G^0(\tau);$$

2) находим решение $x(t)$ задачи Коши

$$\dot{x} = g\,(t,x) + h\,(t,x)\,u(t,x),\ t \in (0,\xi),\ x(0+) = \omega(\tau(0), 0, x_0),$$

где $u(t,x)$ вычисляется по формуле, аналогичной формуле особого режима, представленной в [1];

3) интегрируем уравнение (2) при $t=\xi$, $x=x(\xi-)$ и находим значение $\tau(\xi)$ из условия
$$\tau(\xi) \in \operatorname{Arg}\min_{\tau} G^1(\tau, x(\xi-)).$$

4) находим решение $x(t)$ задачи Коши

$$\dot{x} = g\,(t,x) + h\,(t,x)\,u(t,x),\ t \in (\xi,T),\ x(\xi+) = \omega(\tau(\xi), \xi, x(\xi-)),$$

где $u(t,x)$ вычисляется по формуле, аналогичной формуле особого режима, представленной в [1];

5) интегрируем уравнение (2) при $t=T$, $x=x(T-)$ и находим значение $\tau(T)$ из условия

$$\tau(T) \in \operatorname{Arg}\min_{\tau} G(\tau, x(T-));$$

6) вычисляем новое значение функционала

$$F\left(x(T)\right) = F\left(\omega(\tau(T), T, x(T-))\right).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Описанная выше процедура гарантирует выполнение неравенства $L(m) \leqslant L(m^0)$ и, как следствие, выполнение неравенства*

$J(m) \leqslant J(m^0)$. *При этом, если выполняется хотя бы одно из следующих неравенств:*

$$G(\tau(T), x(T-)) < G(\tau^0(T), x(T-)),$$

$$G(\tau^0(T), x(T-)) < G(\tau^0(T), x^0(T-)),$$

$$G^0(\tau(0)) < G^0(\tau^0(0)), \quad \int\limits_0^T \big(R(t, x(t), u^0(t)) - R(t, x^0(t), u^0(t))\big)\, dt > 0,$$

то справедливо строгое неравенство $L(m) < L(m^0)$ *и, как следствие, строгое неравенство* $J(m) < J(m^0)$.

Замечание. *Все вышеизложенное легко обобщается на случай конечного числа* s *разрывов траектории (импульсов управления) при* $t = 0$, $t = \xi_k$, $k = 1, \ldots, s$, $t = T$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кротов В. Ф., Моржин О. В., Трушкова Е. А.* Разрывные решения задач оптимального управления. Итерационный метод оптимизации // АиТ. 2013. № 12.

2. *Кротов В. Ф., Фельдман Н. Н.* Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1983. № 2. С. 160–168.

3. *Krotov V. F.* Global methods in optimal control theory. N. Y. : Marcel Dekker, 1996.

УДК 517.927

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ УЗЛОВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ[1]

А. Ю. Трынин (Саратов)

tayu@rambler.ru

Пусть $q \in L[0,\pi]$, и $\lambda_n = \lambda_n[q]$ — n-е собственное значение задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} \hat{y}'' + [\lambda - q]\hat{y} = 0, \\ \sin\alpha \hat{y}'(0) + \cos\alpha \hat{y}(0) = 0, \\ \sin\beta \hat{y}'(\pi) + \cos\beta \hat{y}(\pi) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где α, $\beta \in \mathbb{R}$, а $\hat{y}(x, q, \lambda_n) \equiv \hat{y}_n(x)$ есть соответствующая ему ортонормированная собственная функция этой задачи $\|\hat{y}(\cdot, q, \lambda_n)\|_{L_2[0,\pi]} = 1$. Будем

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00102)