УДК 517.5

Аппроксимация жесткими Фреймами в нульмерных группах[1]

С. Ф. Лукомский, А. М. Водолазов (Саратов, Россия)
LukomskiiSF@info.sgu.ru VAM21@yandex.ru

В нульмерных группах получена общая оценка аппроксимации жесткими фреймами функций, из которой следует оценка аппроксимации для функций из пространств Соболева с логарифмическим весом.

Ключевые слова: жесткий фрейм, аппроксимация, нульмерные группы.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект No 22-21-00037).

Approximation by tight Frames in zero-dimensional groups[1]

S. F. Lukomskii, A. M. Vodolazov (Saratov, Russia)
LukomskiiSF@info.sgu.ru VAM21@yandex.ru

In zero-dimensional groups we obtain a general estimate of approximation by tight frames, which implies an estimate of the approximation for functions from Sobolev spaces with logarithmic weight.

Keywords: tight frame, approximation, zero-dimensional groups.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No 22-21-00037)..

Введение

В работе [1] , была получена оценка аппроксимации жесткими фреймами для функций из пространства Соболева со степенным весом. В работе [2] был указан способ построения жестких време́ймов в группе p-адических чисел, но порядок аппроксимации не был получен. В этой заметке мы укажем порядок аппроксимации жесткими фреймами в группе Виленкина и группе p-адических чисел для функций из пространств более общих, чем пространства Соболева со степенным весом.

Используемые обозначения. G – локально компактная нульмерная группа. G_n – подгруппы, определяющие топологию, $G_{n+1} \subset G_n$, p– простое число. $\sharp G_n/G_{n+1} = p$, $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$. В группе Виленкина: $pg_n = 0$, в p-адической группе: $pg_n = g_{n+1}$. Оператор растяжения $\mathcal{A}G \mapsto G$: $\mathcal{A}x := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_{n-1}$, если $x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \in G$.

$H_0 = \{h \in G : h = \sum_{j=1}^{s} a_{-j} g_{-j} s \in \mathbb{N},\ a_j = \overline{0, p-1}\}$ – множество сдвигов.
$\chi : G \mapsto \mathbb{R}$ -характеры, X–группа характеров. $G_n^{\perp}$ аннулятор группы G_n, r_n функции Радемахера, $(\chi\mathcal{A}, x) \stackrel{\text{def}}{=} (\chi, \mathcal{A}x)$.
$\mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N}) = \{f \in L_2(G) : \operatorname{supp} f \subset G_{-N}, f(x) \textit{ постоянна на } G_M \dot{+} g\}$.

Порядок аппроксимации

Следующие две теоремы справедливы в любой нульмерной группе.

Теорема 1 (Принцип двойственности). *Пусть* $M, N \in \mathbb{N}$ *и* $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$ *масштабирующая функция с маской* m_0. *Определим маски* $m_j : j = \overline{1, q}$ *так, что*
1)$\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) m_j(\chi) = \mathbf{1}_{E_j}(\chi)$, *где* $E_j = G_{-s(j)}^{\perp} r_{-s(j)}^{\alpha_{-s(j)}} r_{-s(j)+1}^{\alpha_{-s(j)+1}} ... r_0^{\alpha_0}$ *есть дизъюнктные смежные классы и* $E_j \mathcal{A}^t$ *также дизъюнктные ,*
2)существуют целые $t(j) \geq 0$, *такие, что* $\bigsqcup_j E_j \mathcal{A}^{t(j)} = G_{M+1}^{\perp} \setminus G_M^{\perp}$. *Определим функции* $\psi^{(j)}(x), j = 1, ..., q-1$ *равенствами*

$$\hat{\psi}^{(j)}(\chi) = \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h^{(j)} \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)} = \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) m_j(\chi).$$

Тогда аффинная система $\psi_{n,h}^{(j)}(x) = p^{\frac{n}{2}} \psi^{(j)}(\mathcal{A}^n x \dot{-} h), \quad n \in \mathbb{Z}, h \in H_0$, *образует жесткий фрейм в* $L_2(G)$

По теореме 1, функции $\{\psi_{n,h}^{(j)}\}$ образуют жесткий фрейм. Поэтому

$$\lim_{\tilde{N} \to +\infty} \|f - \sum_{n=-\infty}^{\tilde{N}} \sum_{j=1}^{q} \sum_{h \in H_0} \langle f, \psi_{n,h}^{(j)} \rangle \psi_{n,h}^{(j)}\|_2 = \lim_{\tilde{N} \to +\infty} \|f - S_{\tilde{N}}\| = 0.$$

Мы указываем порядок этой аппроксимации.

Теорема 2. *Пусть функции* $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, ..., \psi^{(q)}$ *и числа* $t(j)$ *построены как в теореме 1. Обозначим* $l = \max t(j)$. *Тогда для* $\tilde{N} > N$

$$\|f - S_{\tilde{N}}\| \leq (N+1) p^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n=\tilde{N}+1}^{\infty} \left(\int\limits_{G_{n-l+1}^{\perp} \setminus G_{n-l}^{\perp}} |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Чтобы воспользоваться этими теоремами надо иметь масштабирующую функцию $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$ с маской m_0. В различных группах методы построения масок различны, ибо в них различны групповые операции. Мы укажем способы построения масштабирующих функций в Q_p и группе Виленкина.

Масштабирующие функции в Q_p и группе Виленкина

Пусть $M,N\in\mathbb{N}$. Масштабирующая функция $\varphi\in\mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$, в частотной форме удовлетворяет уравнению $\hat{\varphi}_(\chi)=\hat{\varphi}(\chi A^{-1})m_0(\chi)$. с маской $m_0(\chi)=\sum_{h\in H_0^{(N+1)}}\beta_h\overline{(\chi,A^{-1}h)}$ постоянной на смежных классах $G_{-N}^{\perp}r_{-N}^{\alpha_{-N}}...r_{-N+s}^{\alpha_{-N+s}}$. Если обозначим значения маски m_0 на смежных классах $G_{-N}^{\perp}r_{-N}^{\alpha_{-N}}r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}}...r_M^{\alpha_M}$ через $\lambda_{\alpha_{-N}\alpha_{-N+1}...\alpha_0...\alpha_M}=\lambda_m$, $q_n=e^{-\frac{2\pi i}{p}}\sum\limits_{k=-N}^{M}\alpha_k p^{-N-k}$, $n=a_{-N-1}+a_{-N}p+...+a_{-1}p^N$, то получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} q_0^0 & q_0^1 & ... & q_0^{p^{N+1}-1}\\ q_1^0 & q_1^1 & ... & q_1^{p^{N+1}-1}\\ ... & ... & ... & ...\\ q_{p^{N+1}-1}^0 & q_{p^{N+1}-1}^1 & ... & q_{p^{N+1}-1}^{p^{N+1}-1}\\ ... & ... & ... & ...\\ q_{p^{M+N+1}-1}^0 & q_{p^{M+N+1}-1}^1 & ... & q_{p^{M+N+1}-1}^{p^{N+1}-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_{p^{N+1}-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_{p^{M+N+1}-1}\end{pmatrix} \qquad (1)$$

в которой неизвестными являются λ_m и β_n. Мы должны их найти так, чтобы $\hat{\varphi}(\chi)=m_0(\chi)m_0(\chi\mathcal{A}^{-1})...m_0(\chi\mathcal{A}^{-N-M})=0$ на множестве $G_{M+1}^{\perp}\setminus G_M^{\perp}$. Для нахождения λ_m и β_n строим дерево $T=T(m_0)$. Для любого $m\in\mathbb{N}:p^{M+N}\le m\le p^{M+N+1}-1$ строим путь из листа λ_m к корню λ_0 $\lambda_m\to\lambda_{m\,\mathrm{div}\,p}\to\lambda_{m\,\mathrm{div}\,p^2}\cdots\to\lambda_{m\,\mathrm{div}\,p^{M+N}}\to\lambda_0=1$. Ясно, что $H=M+N$ есть высота p-ичного дерева T. (см. Рис.1).

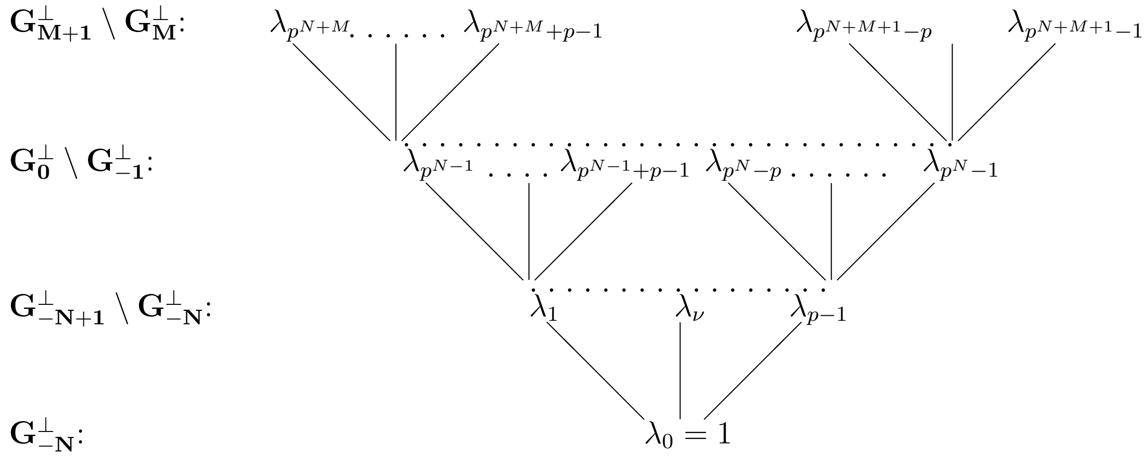

Рис.1 Дерево $T=T(m_0)$.

Множество всех произведений $\lambda_m\lambda_{m\,\mathrm{div}\,p}...\lambda_0$ совпадает с множеством всех значений функции $\hat{\varphi}(\chi)$ на множестве $G_{M+1}^{\perp}\setminus G_M^{\perp}$. На каждом пути $\lambda_m\to\lambda_{m\,\mathrm{div}\,p}\to\lambda_{m\,\mathrm{div}\,p^2}\cdots\to\lambda_{m\,\mathrm{div}\,p^{M+N}}$ выбираем один узел и помещаем туда ноль. Множество этих нулей обозначим $\Lambda_0(T)$.

Теорема 3. *Если* $\sharp\Lambda_0(T)) \leq p^{N+1}-1$, *то соответствующие значения* $\lambda_\nu \in \Lambda_0(T)$ *определяют маску* m_0 *некоторой масштабирующей функции. Если* $\lambda_\nu \notin \Lambda_0(T)$ *то* $\lambda_\nu \neq 0$.

В группе Виленкина для построения масштабирующей функции используются N-валидные деревья [3]. Дерево T называется N-валидным, если
1) В корне дерева и его вершинах уровней $1, 2, \ldots, N-1$ стоят нули.
2) Любой путь $(\alpha_k \to \alpha_{k+1} \to \cdots \to \alpha_{k+N-1})$, $\alpha_j = \overline{0, p-1}$ длины $N-1$ представлен в дереве точно один раз.

Для любого узла α_{-N} уровня больше $N-1$ существует единственный путь $(\alpha_{-1} \leftarrow \cdots \leftarrow \alpha_{-N+1} \leftarrow \alpha_{-N})$ длины $N-1$. Соединим узел α_{-N} со всеми путями $\alpha_{-l+N-1} \leftarrow ... \leftarrow \alpha_{-l+2} \leftarrow \alpha_{-l+1}$ меньшего уровня так, что $\alpha_{-1} \leftarrow ... \leftarrow \alpha_{-N+2} \leftarrow \alpha_{-N+1} = \alpha_{-l+N-1} \leftarrow ... \leftarrow \alpha_{-l+2} \leftarrow \alpha_{-l+1}$.
Обозначим полученный граф через Г. Определяем $N+1$ мерный массив равенствами
(a)$\lambda_{0,0,\ldots,0} = 1$,
(b)$\lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1},\alpha_0} = 1$ for $(\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \ldots, \alpha_{-1}, \alpha_0) \in \Gamma$,
(c)$\lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1},\alpha_0} = 0$ for $(\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \ldots, \alpha_{-1}, \alpha_0) \notin \Gamma$.
Зададим маску m_0 на $G_1^\perp$ равенствами
$m_0(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} ... r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0}) = \lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1},\alpha_0}$,
продолжим ее периодически на X и положим $\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi \mathcal{A}^{-k})$.

Теорема 4. *[3] Пусть* T *есть* N*-валидное дерево высоты* H. *Тогда*
(a) $\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{H-N+1} m_0(\chi \mathcal{A}^{-k})$ *при* $\chi \in G_{H-2N+2}^\perp \setminus G_{H-2N+1}^\perp$,
(b) $\hat{\varphi}(\chi) = 0$ *при* $\chi \in G_{H-2N+2}^\perp \setminus G_{H-2N+1}^\perp$.
(c) $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_M^\perp)$, $M = H - 2N + 1$.

Т.о. каждое N-валидное дерево высоты H порождает масштабирующую функцию $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$ с $M = H - 2N + 1$ и мы можем использовать теоремы 1 и 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Farkov Y., Lebedeva E, Skopina M.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties. // International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2015. T. 13, № 5.

[2] *Lukomskii S., Vodolazov A.* p-adic tight wavelet frames. // JMAA. 2023. Vol. 527, Issue 1, Part 1, 1 November, 127372.

[3] *S. F. Lukomskii, G. S. Berdnikov.* N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups. // International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2015. T. 13, № 5, 11-22